E LE THÉORÈME DE POINCARÉ–HOPF

Nous donnons la preuve en dimension quelconque de ce résultat, vu au chapitre 8 du livre dans le cas des surfaces. L'indice des champs de vecteurs a fait l'objet de la sous–section 7.4.4.

Théorème E.1 (Poincaré–Hopf)**.** *Soit X un champ de vecteurs sur une variété compacte M ayant un nombre fini de zéros. Alors la somme des indices de X est égale à la caractéristique d'Euler–Poincaré de M.*

Comme il est expliqué dans la sous-section 7.4.4 du livre, un cas particulier important est le suivant :

Corollaire E.2. *Si f est une fonction C^2 sur M dont les points critiques sont non dégénérés,*

$$\chi(M) = \sum_{x \in \text{crit}(f)} (-1]_x^{\text{ind}}(f)$$

La preuve qui suit, qui utilise le théorème des voisinages tubulaires, est due à J. Milnor.

E.1 Champs de vecteurs "sortant" sur un domaine à bord d'un espace euclidien

Lemme E.3. *Soit D un domaine à bord de $\mathbf{R}^n$. Soit X un champ de vecteurs sur D qui*

1. *n'a qu'un nombre fini de zéros, tous situés à l'intérieur de D ;*
2. *est un champ "sortant", c'est–à–dire que pour tout $x \in \partial D$, le produit scalaire euclidien de X_x avec la normale unitaire sortante ν_x est stritement positif.*

Alors la somme des indices de X aux zéros est égale au degré de l'application $x \mapsto \nu_x$ de ∂X dans S^{n-1}.

Démonstration. Soient $z_1, z_2, \cdots z_k$ les zéros du champ X. On choisit un $\epsilon > 0$ tel que les boules fermées $\overline{B}(z_i, \epsilon)$ soient disjointes et contenues dans l'intérieur de D. On introduit le domaine à bord

$$D' = D \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq k} B(z_i, \epsilon),$$

dont le bord orienté est

$$\partial D \bigcup_{1 \leq i \leq k} S(z_i, \epsilon),$$

où les spères sont orientées par la normale qui pointe vers l'intérieur. On introduit aussi $X' = \frac{X}{\|X\|}$, qui donne une application de $\partial D'$ dans S^{n-1} de degré nul (car c'est la restriction d'une fonction définie sur D') d'après l'exercice 20 du chapitre 7. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{ind}_{z_i} X = \deg(X'_{|\partial D}) = \deg(\nu)$$

puisque d'après l'hypothèse X' et ν sont homotopes. □

E.2 Zéros non dégénérés

Un zéro x d'un champ de vecteurs X sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ sera dit *non dégénéré* si sa différentielle en x est inversible. On peut toujours supposer que ce zéro est 0. Alors X est un difféomorphisme d'une boule ouverte contenant 0 sur son image. En particulier, x est un zéro *isolé*. De plus X est homotope à sa différentielle T_0X (voir l'exercice 3 du chapitre 7 du livre), et, d'après la sous-section 7.4.4, a même indice que le champ linéaire $x \mapsto T_0X \cdot x$, c'est–à–dire ± 1 suivant le signe du déterminant de T_0X.
Maintenant, si x est un zéro d'un champ de vecteurs X sur une variété, on dira que ce zéro est non dégénéré si le zéro correspondant de l'expression de X dans une carte l'est. Cette propriété ne dépend pas de la carte ; x est encore un zéro isolé d'indice ± 1.

E.3 Cas d'un champ de vecteurs dont les zéros sont non dégénérés

Lemme E.4. *Sur une variété compacte, pour les champs de vecteurs à zéros non dégénérés, la somme des indices ne dépend pas du champ.*

Démonstration. On commence par plonger la variété dans un espace euclidien. Soit $V_r(M)$ un voisinage tubulaire de M (voir l'exercice 24 du chapitre 3 du livre, et son corrigé). On choisit un $r' < r$, et on introduit le domaine $D = \overline{V_{r'}(M)}$. On note p l'application de D dans M qui associe à $x \in D$ l'unique point de M qui réalise $\mathrm{dist}(x, M)$. Un champ de vecteurs X sur M étant donné, on le prolonge à D en posant $\tilde{X}_x = X_{p(x)} + \big(x - p(x)\big)$. On obtient un champ C^1 sur D qui satisfait aux hypothèses du lemme **??**, et qui a les mêmes zéros que X. D'après la preuve du théorème des voisinages tubulaires, en un zéro z, on a

$$d_z\tilde{X} \cdot h = \begin{cases} d_zX \cdot h & \text{si} \quad h \in T_zM \\ \quad h & \text{si} \quad h \in (T_zM)^{\perp} \end{cases}$$

(on travaille dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$ contenant z, avec le système de coordonnées donné par le théorème des voisinages tubulaires, d'où la notation d_z). En particulier, $d_z\tilde{X}$ et d_zX ont même déterminant. Puisque z est un zéro non dégénéré, les champs X et $\tilde{X}$ ont même indice en z, à savoir ± 1 suivant le signe du déterminant de d_zX.
Mais d'après le lemme **??**, la somme des indices des zéros de $\tilde{X}$ est égale au degré de l'application "normale sortante", et ne dépend pas de X.

□

E.4 Cas des zéros dégénérés.

Soit X un champ de vecteurs sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ ayant un unique zéro isolé dégénéré z. Il existe alors un champ X' à zéros non dégénérés, qui coïncide avec X en déhors d'une boule fermée de centre z, et dont la somme des indices est égale à l'indice de X en z. Pour le voir on choisit une valeur régulière v (forcément non nulle) de X vu comme application de U dans $\mathbf{R}^n$, une boule fermée $\overline{B}(z,r)$ contenue dans U, et une fonction plateau f valant 1 sur $\overline{B}(z,\frac{r}{2})$, et à support contenu dans $\overline{B}(z,r)$. Le champ

$$X' = X - fv$$

convient, à condition de choisir v de norme inférieure au minimum de $\|X\|$ sur la couronne fermée $\overline{B}(z,r)\setminus B(z,\frac{r}{2})$, ce qui est toujours possible d'après le théorème de Sard. Avec notre choix de v, ses seuls zéros sont les x de $\overline{B}(z,\frac{r}{2})$ tels que $X_x = v$, et d'après le lemme **??**, la somme des indices des zéros de X' et l'indice de X en z sont égaux au degré de l'application de $S(z,r)$ dans S^{n-1} donnée par la restriction de $\frac{X}{\|X\|}$.
Si X est un champ de vecteurs sur une variété compacte ayant un nombre fini de zéro, en transportant la construction ci–dessus par des cartes, on peut le remplacer par un champ n'ayant que des zéros non dégénérés sans changer la somme des indices.

E.5 Interprétation de la somme des indices

Il "suffit" de prendre un champ X bien choisi. La méthode est la même qu'en dimension 2, et les arguments de la sous–section 8.5.3 du livre s'étendent tels que : on associe à toute triangulation de la variété un champ C^1 par morceaux qui a exactement un zéro d'indice $(-1)^k$ à l'intérieur de chaque simplexe de dimension k, puis un champ C^2 ayant les mêmes zéros et les mêmes indices. La somme des indice est la somme alternée

$$\sum_{k=0}^{\dim(M)} (-1)^k f_k,$$

où f_k est le nombre des simplexes de dimension k. On en déduit que ce nombre ne dépend pas du choix de la triangulation. On peut montrer, par un argument analogue à celui de la dimension 2 (voir section 8.1.2 du livre), que ce nombre est égal à

$$\sum_{k=0}^{\dim(M)} (-1)^k \dim H^k(M,\mathbf{R}),$$

c'est–à–dire à la caractéristique d'Euler–Poincaré de M.