

Écoulements à surface libre graduellement variés

Dans les rivières ou les canaux à ciel ouvert, la surface libre peut prendre des formes curieuses. Pour un débit donné, la profondeur peut-être grande et la vitesse de l'eau faible à un certain endroit, le régime d'écoulement est alors dit *fluvial*. Ailleurs au contraire, la profondeur peut être faible et la vitesse grande, le régime est alors dit *torrentiel*. Les transitions d'un régime à l'autre sont subtiles. Dans ces quelques pages, les mécanismes qui contrôlent l'évolution de la profondeur sont mis en évidence, leurs équations sont présentées et les propriétés les plus importantes de ces écoulements sont dégagées.

Cette présentation est limitée au cas simple d'un canal de section rectangulaire, rectiligne, de largeur uniforme ℓ , dont le fond possède une pente $i = -\frac{dz_f}{dx}$ par rapport au plan horizontal sur lequel est définie l'abscisse x , comme représenté sur la figure 1.

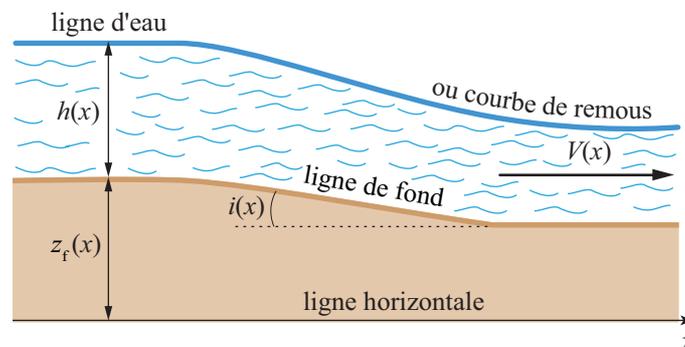


Figure 1. Illustration des principales définitions et notations.

Cette pente est supposée assez faible pour que l'angle entre la *ligne de fond* d'équation $z_f(x)$ et l'horizontale puisse être confondu avec son sinus et sa tangente. Les situations où les grandeurs comme $z_f(x)$ et $h(x)$ pourraient varier rapidement sont donc exclues. Par ailleurs, la distribution de vitesse dans la section droite est considérée comme uniforme et notée $V(x)$. Aussi simplificatrices qu'elles soient, ces hypothèses permettent de dégager la morphologie de la surface libre, de situer la position éventuelle d'un *ressaut* et d'en évaluer les propriétés majeures.

1. Écoulement uniforme. Profondeur normale. Célérité des ondes à la surface

Commençons par rappeler quelques définitions. L'*aire mouillée* A est celle de la section droite de l'eau coulant dans le canal ; le *périmètre mouillé* P est la longueur de la fraction du contour de cette section droite en contact avec les berges et le fond. On appelle *rayon hydraulique* la longueur

$R_h = \frac{A}{P}$. Dans le cas simple d'un canal de section rectangulaire de grande largeur ℓ où la profondeur est assez petite pour que $h \ll \ell$, ces grandeurs valent : $A = \ell h$, $P = \ell + 2h$, $R_h = h$. L'invariance du débit $Q = V\ell h$ impose alors celle du produit Vh .

Les forces qui s'exercent sur une tranche unité de l'écoulement se réduisent à la projection du poids sur la ligne de fond et au frottement, dont l'équilibre s'écrit $kV^2P = gAi$, ou encore

$V = \left(\frac{g}{k} R_n i \right)^{\frac{1}{2}}$. Dans ces relations, la contrainte tangentielle de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse, comme dans tout écoulement turbulent. Cependant, le coefficient de frottement k ne peut pas être constant. Il varie à la fois avec la profondeur et avec la rugosité du fond. La plupart des hydrauliciens utilisent la formule empirique de Manning-Strickler, qui admet que $k \approx h^{\frac{1}{3}}$, en reliant le débit Q à la *profondeur normale* h_n dans ce canal en régime uniforme :

$$Q = K l h_n^{\frac{5}{3}} i^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad h_n = \left(\frac{Q}{K l i^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{3}{5}}. \quad (1)$$

Dans ces relations (1), le nouveau coefficient K est dimensionnel et invariant pour un cours d'eau donné. Ses valeurs typiques sont les suivantes : $10 \text{ m}^{\frac{1}{3}} \text{ s}^{-1}$ pour une rivière en forêt dont le lit est encombré de grosses racines, 20 à $30 \text{ m}^{\frac{1}{3}} \text{ s}^{-1}$ pour une rivière de plaine dont le fond est relativement irrégulier, 60 à $70 \text{ m}^{\frac{1}{3}} \text{ s}^{-1}$ pour un canal dont les berges et le radier sont réalisés en béton plus ou moins lisse. En variante aux relations (1), cet équilibre entre le poids et le frottement est souvent écrit de façon adimensionnelle sous la forme $i = f$, en introduisant la pente de

$$\text{frottement } f = \frac{V^2}{K^2 h^{\frac{4}{3}}} = \frac{Q^2}{K^2 l^2 h^{\frac{10}{3}}}.$$

Rappelons à présent une propriété classique des interfaces cisillées, établie dans le texte « Introduction à la théorie linéaire de la stabilité hydrodynamique », situé dans l'item « Justifications théoriques » de la partie « Pour les scientifiques ». Il est montré que la relation entre la pulsation ω et le nombre d'onde k d'une perturbation présente sur l'interface entre deux fluides de masses volumiques ρ_1 (au-dessous) et ρ_2 (au-dessus) s'écrit (voir la relation (13) du texte cité)

$$\omega^2 = gk \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{\sigma k^2}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (2)$$

Dans le cas de l'interface entre l'eau et l'air, il est justifié de négliger ρ_2 , 800 fois plus petit que ρ_1 . Par ailleurs, si l'on ne s'intéresse pas aux petites perturbations comme les rides capillaires, on peut aussi négliger la tension superficielle σ . Par contre, la profondeur de l'eau n'est pas infinie comme cela a été supposé dans le texte sur la stabilité des interfaces. En tenant compte de la correction qui fait intervenir la profondeur finie h , et en raison des simplifications ci-dessus, la relation (2) devient :

$$\omega^2 = gk \tanh(kh). \quad (3)$$

La célérité $c = \omega / k$ des ondes qui peuvent se propager à la surface de l'eau s'en déduit immédiatement. Notons que, pour les perturbations de grande longueur d'onde, telles que $kh \ll 1$, le résultat devient particulièrement simple $c = \sqrt{gh}$ et montre que c'est la profondeur qui contrôle cette célérité devenue indépendante de la longueur d'onde.

2. Ecoulement graduellement varié. Courbes de remous

Limitons notre analyse aux régimes graduellement variés, ce qui exclut toute évolution rapide des paramètres comme $z_f(x)$, $h(x)$, $V(x)$. Associons alors aux relations précédentes l'expression de l'énergie par unité de poids du fluide, c'est-à-dire de la *charge* H , qui s'écrit

$$H = z_f + h + \frac{Q^2}{2gl^2h^2}, \quad (4)$$

On reconnaît au second membre l'addition de l'énergie potentielle dans le champ de pesanteur $z_f + h$ et de l'énergie cinétique $V^2/2g$. Après une dérivation par rapport à l'abscisse x et un changement de signe, cette expression devient :

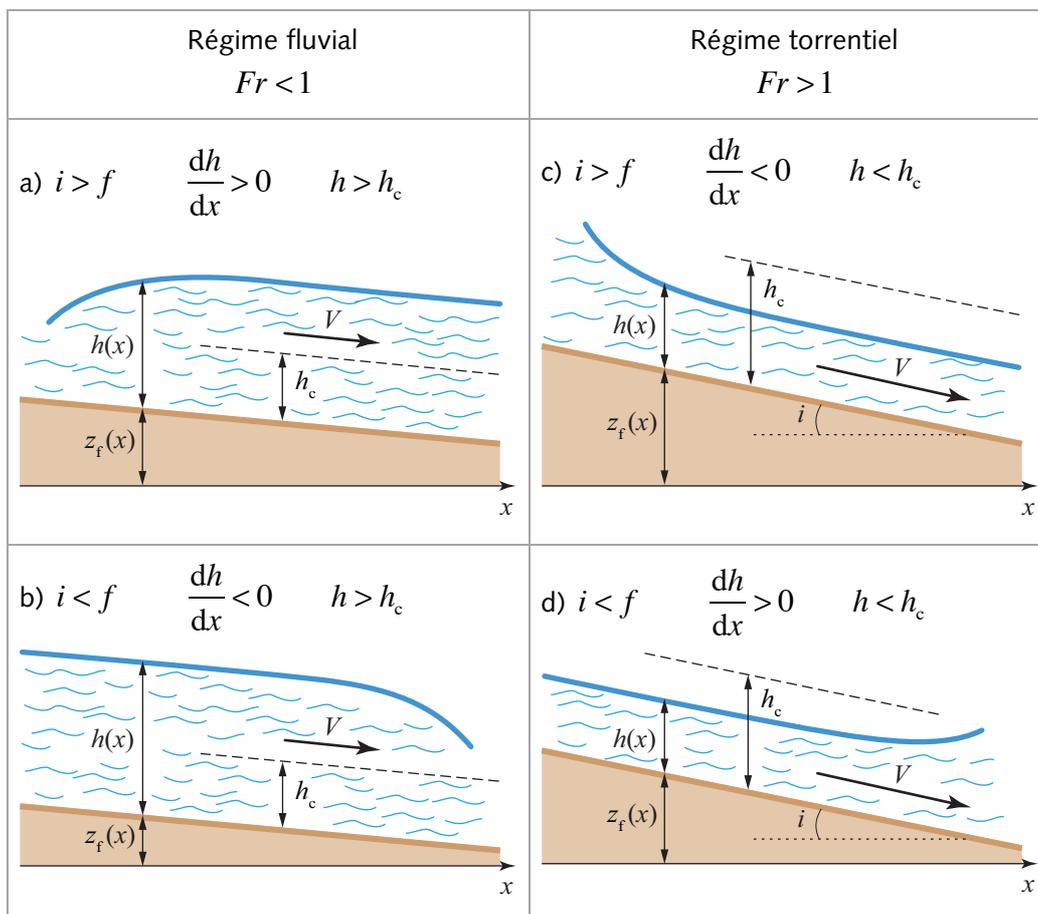
$$-\frac{dH}{dx} = i - \frac{dh}{dx} + \frac{V^2}{gh} \frac{dh}{dx}. \quad (5)$$

On remarquera que, lorsque le régime est uniforme, avec $dh/dx = 0$, cette relation se ramène à $i = -(dH/dx)$. Ceci permet d'assimiler le premier membre à la pente caractéristique du frottement $f(x)$ et de mettre la relation (5) sous la forme :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - f}{1 - Fr^2}, \quad (6)$$

en introduisant le *nombre de Froude* $Fr = \frac{V}{\sqrt{gh}} = \frac{V}{c}$. Cette relation (6), qui peut être considérée

comme l'équation principale des écoulements graduellement variés, est évoquée dans la note ³ du chapitre 7 du livre. Elle permet de comprendre que, suivant les signes du numérateur et du dénominateur, la profondeur peut croître ou décroître, comme le montrent les quatre figures du tableau ci-dessous, qui représentent les allures possibles de la surface libre, couramment appelées *courbes de remous*.



Cette relation (6) montre, notamment, que la célérité de ondes à la surface représente un seuil critique puisque dh/dx peut devenir infini lorsque $Fr = 1$ sans que $i = f$.

Pour mieux mettre en évidence les comportements respectifs du régime fluvial et du régime torrentiel, considérons la charge spécifique $H_s = h + \frac{Q^2}{2g\ell^2 h^2}$. En régime fluvial, c'est-à-dire à faible vitesse, l'énergie des particules fluide croît comme la profondeur h . Au contraire, en régime torrentiel, elle décroît comme h^{-2} . Cette différence, ainsi que la mise en évidence du minimum $H_{s,\min} = \frac{3h_c}{2}$, où $h_c = \left(\frac{Q^2}{g\ell^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ désigne la profondeur critique telle que $Fr = 1$, est illustrée sur la figure 2.

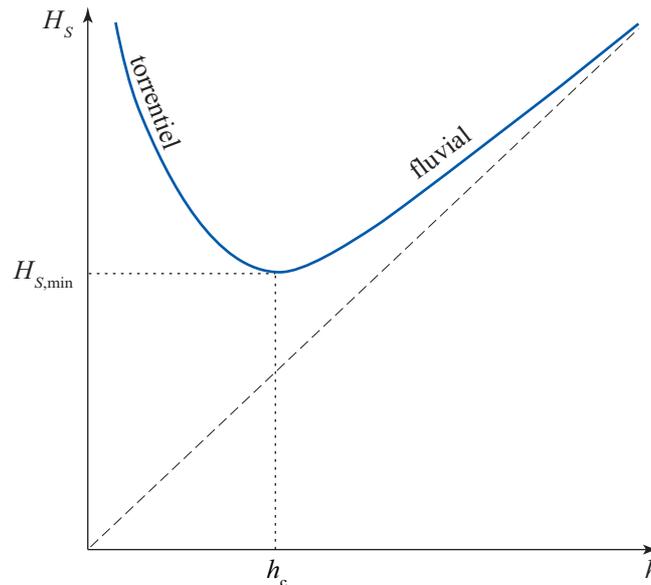


Figure 2. Variation de la charge spécifique $H_s = h + \frac{Q^2}{2g\ell^2 h^2}$ en fonction de la profondeur h et mise en évidence des branches torrentielle et fluviale de part et d'autre des conditions critiques où $Fr = 1$.

3. Le ressaut hydraulique

Le tracé de la ligne d'eau d'une rivière ou d'un canal raccorde certains arcs des courbes de remous comme ceux représentés sur les figures du tableau ci-dessus. Admettons qu'au loin, à l'amont comme à l'aval, la profondeur soit normale. Si les variations d'altitude $z_f(x)$ de la ligne de fond entre ces extrémités lointaines permettent au régime d'être partout graduellement varié, ce raccordement ne pose pas de grandes difficultés. Le calcul de la variation de profondeur résulte d'une intégration de l'équation (6), à partir d'une profondeur imposée loin à l'amont. C'est notamment le cas lorsque l'écoulement va du régime fluvial au régime torrentiel. Le franchissement de la profondeur critique s'effectue alors sans que la dérivée dh/dx n'atteigne des valeurs élevées. Les arcs de courbes du tableau ci-dessus qu'il faut raccorder sont alors ceux des figures b) (à l'amont) et c) (à l'aval). L'écoulement à l'amont d'un seuil (voir la figure 7.2 au chapitre 7 du livre) est un exemple typique de cette situation.

Par contre, pour aller du régime torrentiel au régime fluvial dans une rivière dont la pente de la ligne de fond diminue rapidement, il est nécessaire de pouvoir raccorder les courbes de remous des figures d) (à l'amont) et a) (à l'aval). Ceci implique une transition rapide entre la faible profondeur de d) et la grande profondeur de a), qui se manifeste par un *ressaut hydraulique*, schématisé dans le livre sur la figure 7.3 et illustré par la photographie de la figure 7.4 au chapitre 7 du livre. La présence du ressaut permet d'ailleurs de raccorder les deux courbes de remous fournies par la

solution de l'équation (6), l'une à partir du niveau donné loin à l'amont, l'autre à partir d'un autre niveau imposé loin à l'aval.

En présence d'un ressaut, même si le calcul détaillé de la courbe de remous par intégration de l'équation (6) est relativement complexe, celui du rapport entre les profondeurs conjuguées h_1 et h_2 de part et d'autre du ressaut est simple. Le théorème des quantités de mouvement (voir le texte « Loi fondamentale de la mécanique et premières applications » situé dans l'item « Les bases » de la partie « Pour les scientifiques ») est appliqué au domaine de contrôle limité par les sections 1 et 2, comme représenté sur la figure 3.

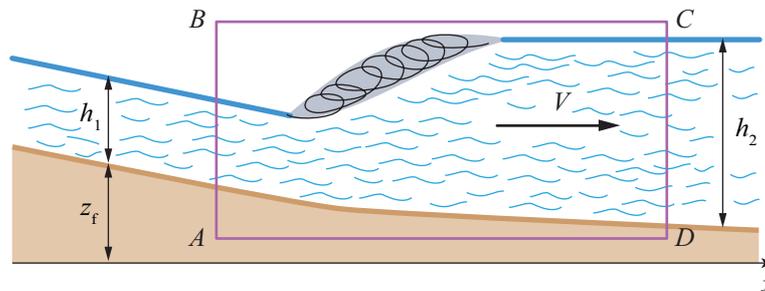


Figure 3. Domaine de contrôle ABCD auquel est appliqué le théorème des quantités de mouvement pour calculer le rapport entre les profondeurs conjuguées h_1 et h_2 de part et d'autre du ressaut hydraulique.

Ceci conduit à la relation

$$Q(V_2 - V_1) = \frac{g\ell}{2}(h_1^2 - h_2^2). \quad (7)$$

En substituant les expressions du débit $Q = V_1\ell h_1 = V_2\ell h_2$ dans les sections 1 et 2, la relation (7) se simplifie sous la forme

$$\frac{2V_1^2}{g} \frac{h_1}{h_2} = 1 + \frac{h_2}{h_1}. \quad (8)$$

Et la racine positive de cette équation du second degré pour le rapport $\frac{h_2}{h_1}$ conduit à l'expression

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1}{2}, \quad (9)$$

qui met en évidence l'importance du nombre de Froude $Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gh_1}}$ à l'amont du ressaut. Une

autre propriété caractéristique du ressaut s'en déduit simplement. La perte de charge, c'est-à-dire d'énergie, dans les forts remous engendrés par le ressaut s'écrit en effet :

$$\Delta H = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1h_2}. \quad (10)$$