Eléments de dynamique du tourbillon

1. Définition, interprétation et exemples simples

Dans un fluide en mouvement avec une vitesse locale $\mathbf{u} = (u, v, w)$, on appelle *tourbillon* le vecteur défini par l'expression

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{u}. \tag{1}$$

En coordonnées cartésiennes ses composantes $\boldsymbol{\omega} = (\xi, \eta, \zeta)$ sont liées à celles de la vitesse par les relations :

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{2}$$

Pour comprendre et illustrer l'information portée par ce vecteur tourbillon, considérons les différences entre les déplacements de deux points P et Q très voisins au sein d'une petite particule fluide, que l'on suppose bidimensionnelle. En notant δx et δy les composantes du vecteur $\mathbf{PQ}$, on a $\delta\mathbf{u} = \mathbf{u}(Q) - \mathbf{u}(P) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\delta y$, ce qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned}
\delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta y, \\
\delta v &= \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}\delta y}_{\text{dilatation}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta x}_{\text{déformation pure}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta x}_{\text{rotation}}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Ces expressions montrent que, d'une façon très générale, le déplacement $\mathbf{PQ}$ comporte trois contributions distinctes. La première représente la dilatation de la particule fluide, qui se trouve identiquement nulle dans le cas d'un fluide à masse volumique invariante où $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, comme montré dans le texte « Conservation de la masse » situé dans l'item « Les bases » de la partie « Pour les scientifiques ». La deuxième représente la déformation pure et a pour caractéristique de n'impliquer aucune rotation en bloc de la particule, mais un simple cisaillement. Quant à la troisième, elle représente la rotation en bloc de la particule fluide autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure passant par le point P, avec la vitesse angulaire $\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$, sans aucun cisaillement, comme l'illustre la figure 1.

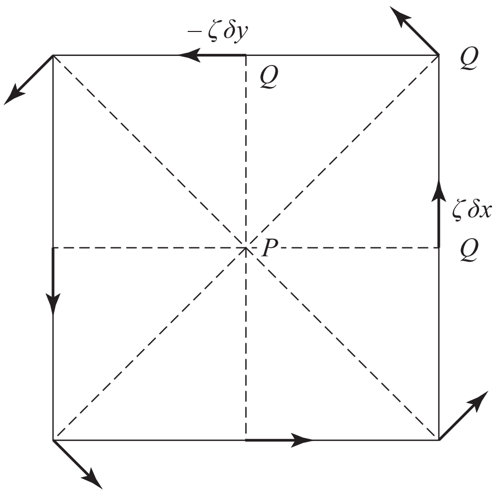

Figure 1. Illustration des déplacements $\delta u = -\zeta\,\delta y$ et $\delta v = -\zeta\,\delta x$ de divers points Q d'une particule supposée carrée, mettant en évidence sa rotation en bloc avec la vitesse angulaire ζ.

Donnons à présent des exemples de structures tourbillonnaires, représentés sur la figure 2.

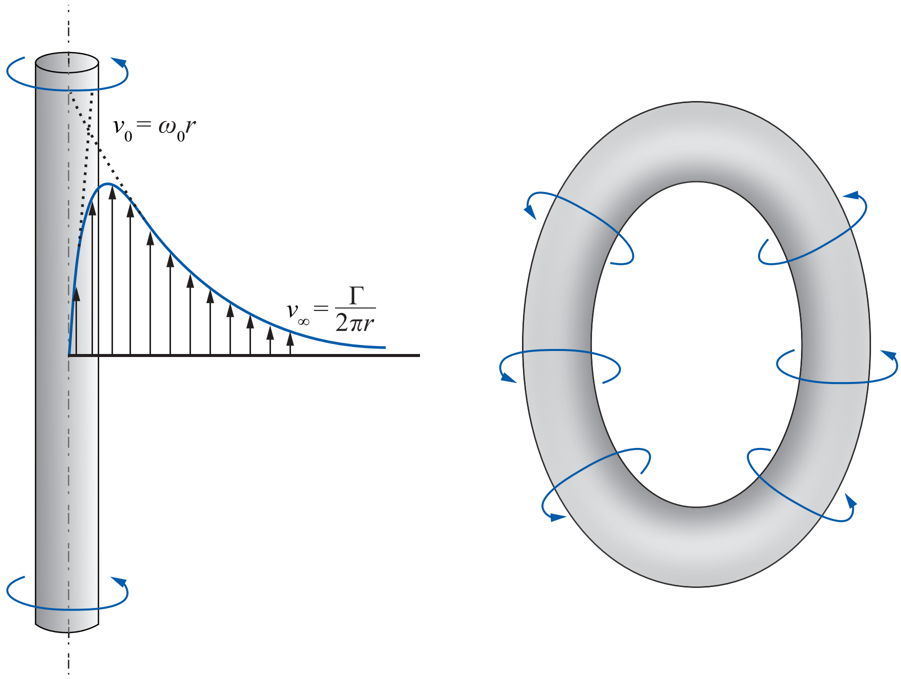

Figure 2. Exemples simples de structures tourbillonnaires : (a) vortex rectiligne schématisant une tornade, (b) vortex torique schématisant un rond de fumée.

Sur l'exemple de la figure 2(a), on peut remarquer que le tourbillon est concentré au centre de la structure, où la distribution de vitesse est proche de celle d'une rotation en bloc, de la forme ωr. Par ailleurs, la vitesse s'annule assez rapidement dès que l'on sort de cette structure, puisque la distribution de vitesse devient alors proportionnelle à $1/r$ et conserve invariante la quantité $\Gamma = 2\pi r\, v$, qui n'est autre que la circulation de la vitesse sur le cercle de rayon r, ou encore le flux du vecteur tourbillon à travers la portion de surface plane limitée par ce cercle. Ceci conduit souvent à schématiser les structures tourbillonnaires comme des lignes vortex, en attribuant à chacune la circulation de la vitesse

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 2\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S. \qquad (4)$$

La seconde égalité (4), déduite de la formule de Stokes, montre que la circulation de la vitesse (Γ) est nécessairement égale au double du flux du tourbillon à travers la surface S limitée par le contour C. On notera que, puisque le vecteur tourbillon est un pur rotationnel, sa divergence est nulle. Ainsi ce champ vectoriel fait partie des champs conservatifs, comme le champ magnétique et la densité de courant électrique. Son flux Γ à travers une portion de surface S constitue donc un invariant d'un tube tourbillon, tout comme le débit qui circule dans une conduite, ou le courant électrique qui passe dans un fil conducteur de l'électricité. Puisque ce flux ne peut pas varier d'un bout à l'autre, un tube tourbillon doit soit se refermer sur lui-même, comme c'est le cas du rond de fumée (fig. 2(b)), soit aller d'une paroi à une autre.

2. L'équation du tourbillon

Pour rester le plus simple possible, limitons nous au cas d'un fluide incompressible, dont le mouvement satisfait à l'équation de Navier-Stokes (voir le texte « Equation de Navier-Stokes » situé dans l'item « les bases » de la partie « pour les scientifiques »)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz\right)+(\nabla\times\mathbf{u})\times\mathbf{u}=\nu\,\nabla^2\mathbf{u}. \tag{5}$$

Prenons le rotationnel de chaque terme de cette équation, en tenant compte de l'identité :

$$\nabla\times(\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega})=(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{u}-(\mathbf{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}+\mathbf{u}(\nabla\cdot\boldsymbol{\omega})-\boldsymbol{\omega}(\nabla\cdot\mathbf{u}).$$

Puisque $\nabla\cdot\mathbf{u}=\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$, on obtient :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}=(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nu\,\nabla^2\boldsymbol{\omega}. \tag{6}$$

L'interprétation de cette équation est évidente pour le premier membre, qui est la dérivée particulaire du vecteur tourbillon, ainsi que pour le dernier terme, qui représente la diffusion du tourbillon par viscosité. Mais quelle est donc la signification du terme $(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{u}=\omega(\partial\mathbf{u}/\partial s)$, qui n'a pas d'équivalent dans l'équation de Navier-Stokes ?

Pour répondre à cette question, considérons un petit tronçon $\mathbf{MN}=\delta\mathbf{s}$ d'une ligne tourbillon, comme représenté sur la figure 3.

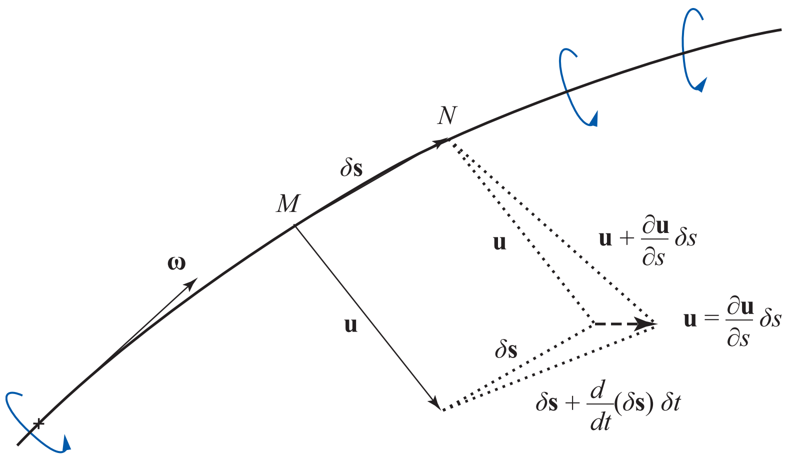

Figure 3. Illustration de la variation du vecteur $\mathbf{MN}=\delta\mathbf{s}$ liée à la différence de vitesse entre ses extrémités M et N.

En abandonnant le terme visqueux, que l'on sait négligeable par rapport aux autres dès que le nombre de Reynolds est très grand, ce qui est le cas très généralement dans l'air et dans l'eau, l'équation du tourbillon (6) peut s'écrire

$$\frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s}. \tag{7}$$

Par ailleurs, d'après la construction effectuée sur la figure 3, la variation relative du vecteur $\delta\mathbf{s}$ est donnée par

$$\frac{1}{\delta s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\mathbf{s})=\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s}. \tag{8}$$

Ces deux relations (7) et (8) montrent que, viscosité mise à part, les deux vecteurs $\boldsymbol{\omega}$ et $\delta\mathbf{s}$ ont des comportements adimensionnels identiques : leur allongement relatif et leur rotation coïncident exactement. Les mécaniciens des fluides ont ainsi l'habitude de dénommer $(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ le terme de *production de vorticité par étirement des lignes tourbillons*.

3. Théorème de Kelvin

Nous savons déjà que la circulation de la vitesse sur une courbe fermée qui entoure une fois un tube tourbillon est invariante le long de celui-ci, et représente donc l'une des propriétés les plus caractéristiques de cette structure tourbillonnaire. Mais nous ignorons encore suivant quelle loi cette circulation Γ peut varier au cours du temps. Suivons donc dans son mouvement une portion de surface S limitée par le contour fermé C, et cherchons à calculer la dérivée particulaire $\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}t$ qui doit vérifier la relation

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=\oint_C \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}+\oint_C \mathbf{u}\cdot\frac{\mathrm{d}(\delta\mathbf{s})}{\mathrm{d}t}. \tag{9}$$

Nous avons déjà vu que $\dfrac{\mathrm{d}(\delta\mathbf{s})}{\mathrm{d}t}=(\delta\mathbf{s}\cdot\nabla)\mathbf{u}$, d'où l'on peut déduire :

$$\mathbf{u}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\mathbf{s})=\mathbf{u}\cdot\left[(\delta\mathbf{s}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right]=\delta\mathbf{s}\cdot\nabla\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right). \tag{10}$$

Par ailleurs, l'équation de Navier-Stokes fournit l'expression

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}=-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+gz\right)+\nu\nabla^2\mathbf{u}. \tag{11}$$

Il vient donc :

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=\oint_C \nabla\left(-\frac{p}{\rho}-gz+\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}+\nu\oint_C \nabla^2\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}. \tag{12}$$

La première intégrale du second membre, égale au flux du rotationnel d'un gradient en utilisant le théorème de Stokes, est identiquement nulle, de telle sorte que, finalement, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=\nu\oint_C \nabla^2\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}. \tag{13}$$

Ainsi, la dérivée particulaire de la circulation de la vitesse, ou du flux du vecteur tourbillon, ne dépend que des effets de la viscosité et est donc négligeable dans les mouvements atmosphériques ou marins, où le nombre de Reynolds est extrêmement grand. Ce résultat constitue le **théorème de Kelvin**, qui peut s'énoncer comme suit : *dans un fluide non visqueux de densité uniforme, soumis à des forces de masse dérivant d'un potentiel scalaire, la dérivée particulaire* $\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}t$ *est nulle.*

Les implications de ce théorème sont importantes :

- Le flux du tourbillon à travers une surface qui n'entoure pas le tube tourbillon est nul et restera nul, ce qui signifie que cette surface n'entourera jamais le tube tourbillon.

- Les lignes et surfaces tourbillons, par définition tangentes en tout point au vecteur tourbillon, demeurent des lignes et surfaces tourbillons. Ce dernier résultat est souvent dénommé **théorème de Helmholtz**.

4. Un modèle élémentaire de tornade

Choisissons des coordonnées cylindriques (r,θ,z) et cherchons à bâtir un modèle de tornade verticale (ω est la seule composante non nulle du vecteur tourbillon dirigé suivant l'axe Oz), axisymétrique ($\frac{\partial}{\partial\theta}\equiv 0$) et stationnaire ($\frac{\partial}{\partial t}\equiv 0$), qui satisfasse à l'équation de continuité

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{14}$$

à la définition du tourbillon

$$\frac{\partial v}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial r}=0, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)=2\omega, \tag{15}$$

et à l'équation du tourbillon

$$\frac{\partial u}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial z}=0, \qquad u\frac{\partial \omega}{\partial r}+w\frac{\partial \omega}{\partial z}=\omega\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \omega}{\partial r}\right). \tag{16}$$

Une solution élémentaire, telle que $w=az$ et $u=-\frac{ar}{2}$, est possible si v, ω et le paramètre a sont liés par les équations

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)=2\omega \quad \text{et} \quad -\frac{ar}{2}\frac{\partial \omega}{\partial r}=a\omega+\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \omega}{\partial r}\right), \tag{17}$$

dont la solution s'écrit :

$$\omega=\omega_0\exp\left(-\frac{ar^2}{4\nu}\right), \qquad v=\frac{4\nu\omega_0}{ar}\left[1-\exp\left(-\frac{ar^2}{4\nu}\right)\right]. \tag{18}$$

Il est remarquable que les trois mécanismes qui gouvernent l'évolution du tourbillon soient bien présents dans cette formulation simplifiée et dans cette solution :

- la diffusion par viscosité qui tend à élargir la tornade et à réduire la vorticité sur l'axe,
- l'advection, qui tend à recentrer le tourbillon au voisinage de l'axe par la composante radiale de la vitesse $u=-(ar/2)$, compensant ainsi l'élargissement par diffusion,
- et l'amplification du tourbillon dû à l'étirement des lignes tourbillons par la composante verticale de la vitesse $w=az$, permettant de maintenir le système à l'état stationnaire.

L'argument de la fonction exponentielle $\frac{ar^2}{4\nu}$ fait apparaître le rayon caractéristique $R=2\sqrt{\frac{\nu}{a}}$, tel que, si $r \ll R$ la variation de vitesse v est pratiquement linéaire ($v_0=\omega_0 r$) et la vorticité uniforme ($\omega=\omega_0$), alors que si $r \gg R$, la vorticité s'est annulée et la distribution de vitesse rejoint la loi des écoulements irrotationnels $v_\infty=\frac{4\nu\omega_0}{ar}$, comme représenté sur la figure 2a. Le flux total de ce tourbillon est donc $\Gamma=8\pi\nu\frac{\omega_0}{a}$. Cette longueur R peut être considérée comme une bonne estimation du rayon de cette tornade.