

Equation de Navier-Stokes

1. La loi de Newton

Partons d'une expérience simple. Considérons la couche de fluide visqueux d'épaisseur ℓ , comme représenté sur la figure 1 ci-dessous.

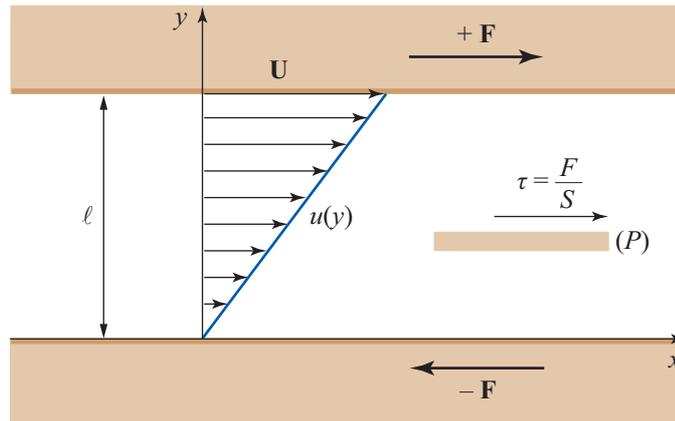


Figure 1. Illustration schématique d'une expérience de cisaillement simple qui met en évidence la relation linéaire entre la contrainte tangentielle τ et la dérivée de la vitesse du/dy .

Cette couche est limitée par deux parois planes parallèles, et soumise à un cisaillement par l'intermédiaire de forces F et $-F$. Celles-ci sont exercées de l'extérieur sur une surface d'aire S , respectivement sur la paroi supérieure et sur la paroi inférieure, elle-même maintenue immobile.

En régime stationnaire, on observe que la distribution de vitesse dans la direction Ox , celle de la force F , varie linéairement de $u = 0$ sur la paroi située en $y = 0$, à $u = U$ sur la paroi supérieure mobile située en $y = \ell$. Si l'on fait varier ces paramètres, on remarque que la force par unité de surface F/S est proportionnelle au gradient de vitesse uniforme $du/dy = U/\ell$ et que le rapport entre ces deux quantités ne dépend que du fluide.

Pour être un peu plus précis, considérons un plan (P) quelconque à une distance y entre les deux parois, et notons $\tau = F/S$ la contrainte tangentielle exercée par le fluide situé au-dessus de (P) sur le fluide situé au-dessous. L'expérience révèle que :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1)$$

où μ est une propriété physique du fluide, l'une de ses variables d'état, appelée la *viscosité dynamique*.

En pratique, cette expérience n'est pas réalisée entre deux plans, mais entre deux cylindres coaxiaux, en prenant les précautions nécessaires pour que les efforts sur les extrémités du domaine fluide annulaire demeurent négligeables par rapport au couple exercé sur chaque cylindre. Lorsque l'entrefer ℓ est très petit par rapport au rayon moyen de ces cylindres, leur courbure est négligeable, et cette expérience devient équivalente à la situation entre deux plans parallèles imaginée ci-dessus. La valeur de τ peut se déduire du couple exercé sur chaque cylindre, et la vitesse U peut être mesurée directement.

Cet appareil est un viscosimètre, qui donne accès à la valeur de la *viscosité dynamique* μ , et l'on obtient des valeurs de l'ordre de 10^{-3} Pa.s pour l'eau et de 10^{-5} Pa.s pour l'air. Lorsque l'on s'intéresse à l'influence de la viscosité sur les distributions de vitesse plutôt qu'aux efforts de frottement, il est classique de substituer à μ la quantité $\nu = \mu / \rho$, appelée la *viscosité cinématique*. Ici ρ désigne la masse volumique du fluide.

Pour mettre la loi précédente (1) sous une forme adaptée aux distributions de vitesse réelles, souvent tridimensionnelles, il faut franchir une étape supplémentaire en la généralisant. Considérons une coupe plane au sein du fluide, dont l'orientation est caractérisée par sa normale unité n_i et à travers laquelle les composantes de la contrainte sont notées T_i en utilisant la notation indicielle $i = (1, 2, 3)$ et la convention de l'indice muet (on convient que, dans tout monôme comme m_{ij} où un indice est répété deux fois, on fait la somme par rapport aux trois valeurs possibles de cet indice : $m_{ij} = m_{11} + m_{22} + m_{33}$). La contrainte T_i désigne la force par unité de surface, exercée par le fluide situé du côté de la normale positive sur le fluide situé de l'autre côté. On introduit alors les composantes σ_{ij} du tenseur de contrainte, qui dépendent de l'orientation de la normale n_i conformément à la relation linéaire $T_i = \sigma_{ij} n_j$. La loi de frottement suggérée par l'expérience requiert que les composantes σ_{ij} soient des fonctions linéaires des dérivées partielles des composantes de vitesse u_i par rapport aux coordonnées x_j . D'une façon très générale on peut donc écrire

$$\sigma_{ij} = G_{ij} + K_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \quad (2)$$

Dans un fluide au repos, on doit retrouver la loi de l'hydrostatique $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, où p est la pression qui vérifie l'équation d'état, et où δ_{ij} est le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, 0 si $i \neq j$). Par ailleurs, d'autres conditions, que nous nous contenterons ici de résumer, permettent de simplifier cette relation en réduisant à un seul les 81 coefficients de K_{ijkl} . Ces conditions sont les suivantes :

- le fluide est isotrope, ce qui impose à la relation (2) d'être invariante par rapport au système d'axes dans lequel elle est écrite,
- le tenseur de contrainte est symétrique, ce qui impose $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$,
- et, parmi toutes les combinaisons des dérivées $\partial u_k / \partial x_l$, les seules à pouvoir intervenir sont celles liées à la déformation pure de la particule fluide, caractérisée par les combinaisons symétriques des dérivées $\partial u_k / \partial x_l$, dont l'expression générale est

$$e_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right).$$

Finalement, la loi constitutive des fluides visqueux, appelée *loi de Newton*, a pour expression :

$$\sigma_{ij} = - \left(p + \frac{2}{3} \mu e_{mm} \right) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (3)$$

On remarque que $e_{mm} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ et que ce terme doit donc s'annuler dès que le fluide peut être supposé incompressible (voir sur ce site le texte « Principe de conservation de la masse » situé dans l'item « Les bases » de la partie « Pour les scientifiques »), circonstance souvent bien vérifiée dans l'air à vitesse modérée et dans l'eau. Dans un tel fluide incompressible, la loi (3) se ramène donc à

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (4)$$

On remarque aussi que les composantes hors de la diagonale du tableau des σ_{ij} (lorsque les indices i et j sont différents) ignorent la pression et se ramènent à la relation (1) dans les situations de cisaillement simple. Quant aux composantes de la diagonale, où $i = j$ et où $\delta_{ij} = 1$, nous verrons plus loin que, si le nombre de Reynolds est beaucoup plus grand que l'unité, ce qui est presque toujours vrai dans les écoulements naturels, le terme proportionnel à la viscosité est négligeable, de sorte qu'elles se réduisent alors à la pression p . Sauf conditions exceptionnelles, les deux termes du second membre de (4) conduisent donc, l'un à la contrainte normale qui se ramène à la pression, l'autre à la contrainte tangentielle proportionnelle à la viscosité et au gradient de vitesse.

2. Equation locale du mouvement

Dans le texte « Loi fondamentale de la mécanique et premières applications » (situé dans l'item « Les bases » de la partie « Pour les scientifiques » sur ce site), il est établi que dans un fluide en mouvement les composantes de vitesse u_i doivent satisfaire à l'équation générale

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho F_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (5)$$

Maintenant que l'on dispose d'une loi constitutive (3), ou (4), pour exprimer le comportement d'un fluide comme l'air ou l'eau, il suffit de la substituer dans (5) pour obtenir l'équation du mouvement d'un tel fluide. Nous allons toutefois nous limiter à des conditions simplifiées, mais tout à fait réalistes, en supposant la viscosité invariante et en ne considérant que les fluides incompressibles. On obtient alors l'équation de Navier-Stokes, à la fois très connue et tout à fait redoutable en raison de ses difficultés d'ordre mathématique, liées à sa non-linéarité. Avec les notations indicelle et vectorielle, successivement, elle s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}. \quad (6)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{F} - \nabla p - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}). \quad (7)$$

Dans plusieurs chapitres du livre, notamment dans les encadrés 2.3 et 2.4 du Chapitre 2, relatifs à la couche limite atmosphérique, et dans le Chapitre 4 relatif au vol des avions, il a été noté que la viscosité n'est significative que dans une mince couche limite proche des parois. En conséquence, dans la plus grande partie du domaine fluide en mouvement le terme proportionnel à la viscosité de (6) ou (7) peut être négligé. L'équation du mouvement se réduit alors à la forme suivante, valable pour les fluides dits « parfaits » :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{F} - \nabla p. \quad (8)$$

Si, de plus, les forces extérieures se réduisent à la pesanteur $\mathbf{F} = -\nabla(gz)$, où z désigne la coordonnée suivant la verticale ascendante, et si la masse volumique est invariante, la force par unité de volume $\rho \mathbf{F}$ est elle aussi un gradient, qui peut être associé au gradient de pression. Notons alors $p^* = p + \rho gz$ la pression modifiée. L'équation prend la forme connue sous le nom d'équation d'Euler :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p^*. \quad (9)$$

Pour mémoire, bien que cela ne soit pas pertinent dans le cas de l'air ou de l'eau, mentionnons aussi le cas tout à fait opposé, où c'est l'inertie du fluide qui est négligeable par rapport à la

viscosité. Dans ce cas, qui correspond aux conditions de la lubrification, l'équation prend la forme connue sous le nom d'équation de Stokes :

$$\nabla p + \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = 0. \quad (10)$$

3. Les nombres de Reynolds et de Froude

Examinons à nouveau l'équation de Navier-Stokes (7), en nous limitant encore au cas d'un fluide de masse volumique invariante soumis à la pesanteur, où $\mathbf{F} = -\nabla(gz)$. Introduisons des grandeurs adimensionnelles, définies à partir des échelles caractéristiques de l'écoulement : une longueur L , une vitesse U , le temps de transit L/U , et la pression d'arrêt ρU^2 . Convenons à présent que toutes les grandeurs intervenant dans (7), y compris les coordonnées et le temps, sont remplacées par leur forme adimensionnée, sans changer leur notation. Alors, l'équation de Navier-Stokes devient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = -\frac{gL}{U^2} \nabla z - \frac{\mu}{\rho UL} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}). \quad (11)$$

Elle fait apparaître au second membre deux rapports sans dimension :

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu}, \quad \text{et} \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}. \quad (12)$$

Le premier est le *nombre de Reynolds*, le second le *nombre de Froude*.

Dans un fluide à masse volumique invariante, donc sans surface libre, où le terme de pesanteur peut être pris en compte par la pression p^* , l'équation de Navier-Stokes devient

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p^* = -\frac{1}{Re} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}). \quad (13)$$

L'interprétation du nombre de Reynolds devient alors très claire, puisque son inverse représente l'importance relative du frottement visqueux par rapport aux termes d'inertie et de pression, groupés au premier membre. Puisque chaque terme de l'équation dimensionnelle (7) a la dimension du rapport d'une vitesse à un temps, on peut encore interpréter le nombre de Reynolds de la façon suivante : il représente le rapport du temps caractéristique des effets visqueux $\tau_v = \frac{L^2}{\nu}$, au temps caractéristique des effets inertiels, qui n'est autre que le temps de transit $\tau_{tr} = \frac{L}{U}$.

On peut en effet vérifier que $Re = \frac{\tau_v}{\tau_{tr}}$.

Plaçons nous maintenant dans les conditions des écoulements d'eau à ciel ouvert, comme les vagues ou les ressauts hydrauliques. Le nombre de Reynolds est tellement grand que le terme visqueux peut être négligé. Au sein du liquide, la masse volumique demeure encore invariante. En maintenant le terme de pesanteur séparé de la vraie pression, qui doit être constante sur la surface libre, l'équation (11) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = -\frac{1}{Fr^2} \nabla z. \quad (14)$$

On en déduit une interprétation immédiate du nombre de Froude : son carré représente l'importance relative des effets inertiels par rapport à la pesanteur. Dans le Chapitre 6 du livre à propos des vagues, et dans le Chapitre 7 à propos des ressauts hydrauliques, nous avons vu plusieurs exemples de situations où ce nombre est le paramètre crucial de l'écoulement. Nous avons aussi noté une autre interprétation intéressante du nombre de Froude, comme le rapport de la

vitesse du fluide U à sa vitesse de chute libre dans le vide sur la hauteur \sqrt{gL} . Celle-ci n'est autre que la célérité des ondes de gravité qui se propagent à la surface libre en eau peu profonde. Ainsi, lorsque $Fr > 1$, le fluide va tellement vite que les ondes ne peuvent pas remonter le courant, l'écoulement est dit torrentiel ; c'est le régime des torrents à forte pente, qui ignorent les conditions aval. Au contraire, lorsque $Fr < 1$, les ondes remontent le courant, l'écoulement est dit fluvial ; c'est le régime des cours d'eau lents où le niveau est fortement influencé par les conditions à l'aval.

4. Fluide parfait incompressible en régime permanent : relation de Bernoulli

Lorsque le nombre de Reynolds est beaucoup plus grand que l'unité, comme c'est généralement le cas dans les écoulements naturels, l'équation de Navier-Stokes se ramène à l'équation d'Euler (9), comme dans un fluide « parfait », c'est à dire sans viscosité. Admettons encore que la masse

volumique ρ soit invariante et que l'écoulement soit permanent ($\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$). Alors cette équation se

réduit à
$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p^* = 0. \quad (15)$$

L'identité $(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nabla\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right)$ permet de mettre cette équation sous la forme :

$$\nabla\left(p^* + \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2}\right) + \rho(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (16)$$

Or, sauf circonstances exceptionnelles comme celles des cyclones mis en rotation par la force de Coriolis, ou bien celles des tornades (voir Chapitre 3 du livre), les écoulements extérieurs aux couches limites sont irrotationnels ($\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$). En conséquence, le dernier terme de cette équation est nul et elle peut encore se simplifier :

$$p + \rho gz + \frac{\rho u^2}{2} = \text{Cste}. \quad (17)$$

Cette relation implique donc l'invariance du premier membre dans toute la partie du domaine fluide où les hypothèses utilisées pour l'obtenir, notamment $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, sont justifiées. C'est l'une des formes classiques de la *relation de Bernoulli*. On notera la différence avec une autre forme, qui est établie dans le texte « Théorème de l'énergie cinétique et relation de Bernoulli » situé dans le même item « les bases » sur ce site, selon laquelle la même grandeur est invariante sur chaque ligne de courant, mais peut varier d'une ligne de courant à une autre.

On peut déduire de cette relation (17) des conséquences fort importantes. Par exemple, lors de la chute d'une masse d'eau dans l'air où la pression est pratiquement constante, il apparaît que $u^2 + 2gz$ doit rester invariant, ce qui traduit l'échange permanent entre énergie cinétique et énergie potentielle au sein de cette masse. Cette relation (17) conduit aussi à la formule de Torricelli pour la vitesse d'un jet d'eau sortant d'un réservoir par un petit orifice. Si l'orifice est situé à une altitude inférieure de h à celle de la surface libre dans le réservoir, la vitesse de l'eau dans le jet est $\sqrt{2gh}$. Enfin, cette relation montre encore qu'en un point d'arrêt comme le bord d'attaque d'une aile, où la vitesse s'annule, la pression est plus grande que dans l'écoulement lointain où elle vaut U , de la quantité $\rho U^2 / 2$, justement appelée *pression d'arrêt*. C'est précisément cette pression d'arrêt que l'on ressent lorsque l'on tente de stopper le jet sortant d'un tuyau en le fermant à la main.