

Exercices supplémentaires du chapitre 1 : Calcul différentiel

1. Donner un exemple de fonction f continue sur $\mathbf{R}$, telle que $f(x) = o(x^n)$ pour tout $n > 0$, et qui n'est pas C^1 .

2. *Racine carrée d'une fonction lisse*

a) Montrer que la fonction $(x^{2n} + y^{2n})^{\frac{1}{2}}$ n'est pas C^n .

b) Soit ϕ une fonction lisse positive sur $\mathbf{R}$ dont l'ensemble des zéros est $\{0, (\frac{1}{n})_{n \geq 1}\}$ (une telle fonction existe d'après l'exercice 2 du chapitre 3). Montrer que la fonction $x \mapsto \phi(x)(\phi(x) + \sin^2 \frac{\pi}{x})$ prolongée par continuité en 0, est lisse, que sa racine carrée est C^1 mais pas C^2 .

3. Soit $f : B(0, r) \rightarrow \mathbf{R}^n$ une fonction différentiable qui commute avec une homothétie $x \mapsto \lambda x$, avec $|\lambda| < 1$. Montrer que f est linéaire.

4. On identifie à $\mathbf{R}^n$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré n dont le coefficient dominant vaut 1. Montrer que l'ensemble des polynômes ayant n zéros distincts est un ouvert.

5. *La régularité C^2 est nécessaire pour le théorème des voisinages tubulaires*

Soit C la courbe paramétrée $t \mapsto m(t) = (t, t^{\frac{3}{2}})$, et $n(t)$ la normale unitaire au point de paramètre t (choisie de façon que l'ordonnée soit positive). Montrer que la fonction $(u, t) \mapsto m(t) + un(t)$ n'est pas localement injective au voisinage de $(0, 0)$.