

## Exercices supplémentaires du chapitre 2 : Variétés

1. Montrer que l'ensemble des droites orientées de  $\mathbf{R}^n$  peut être muni d'une structure de variété difféomorphe à  $TS^{n-1}$ .

2. *Grassmanniennes : un autre point de vue*

Rappelons que  $G_{p,n}$  désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension  $p$  (autrement dit des  $p$ -plans) d'un espace vectoriel de dimension  $n$  (réel ou complexe, le traitement sera ici le même).

a) Soit  $P_0$  un  $p$ -plan, et  $Q_0$  un supplémentaire. Montrer que pour tout  $p$ -plan  $P$  en somme directe avec  $Q_0$ , il existe un  $f \in \text{Hom}(P_0, Q_0)$  et un seul tel que

$$P = \{x + f(x), x \in P_0\}.$$

b) Montrer que cette construction donne un atlas lisse (et même analytique) de  $G_{p,n}$ , et que la structure de variété obtenue est la même que celle vue à la fin de la section 4.6 du livre.