Exercices supplémentaires du chapitre 4 : Autour des groupes de Lie

1. *Le groupe orthogonal complexe*
On note $0(n,\mathbf{C})$ le sous–groupe de $Gl(n,\mathbf{C})$ formé des applications linéaires qui laissent la forme quadratique $\sum_{i=1}^n z_i^2$ invariante, et $SO(n,\mathbf{C})$ le sous-groupe de celles dont le déterminant vaut 1.
a) Montrer que $SO(n,\mathbf{C})/SO(n-1,\mathbf{C})$ est difféomorphe à

$$\{(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n,\sum_{i=1}^n z_i^2=1\}$$

En déduire que $SO(n,\mathbf{C})$ est connexe.
b) Montrer que $SO(n,\mathbf{C})/SO(n)$ est difféomorphe à $\mathbf{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Indication : introduire l'analogue de la décomposition de Cartan (exercice 8 du chapitre 1 du livre) pour $Gl(n,\mathbf{C})$.
c) Une variante de b) : montrer que l'application

$$(A,B)\mapsto A\exp iB$$

définit un difféomorphisme de $SO(n)\times\mathfrak{so}(n)$ sur $SO(n,\mathbf{C})$.

2. *Composantes connexes du groupe pseudo–orthogonal ; remplace l'exercice 11 du livre*
Montrer que $0(p,q)$ est difféomorphe à $O(p)\times O(q)\times\mathbf{R}^{pq}$. En déduire que $O(p,q)$ a quatre composantes connexes si $pq\neq 0$.

3. * Trouver un groupe de Lie G admettant un sous–groupe H distingué dans la composante neutre G_0, mais non dans G.