Exercices supplémentaires du chapitre 5 : Formes différentielles

1. *Pfaffien*
Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. On rappelle qu'un endomorphisme u de E est dit antisymétrique si ${}^t u = -u$, autrement dit si

$$\langle u(x), y\rangle + \langle x, u(y)\rangle = 0, \quad \forall x, y \in E.$$

a) À $u \in \mathrm{End}(E)$ on associe la forme bilinéaire $u^\flat$ donnée par

$$u^\flat(x, y) = \langle u(x), y\rangle.$$

Montrer que $u \mapsto u^\flat$ est un isomorphisme entre l'espace vectoriel des endomorphismes antisymétriques et celui des formes bilinéaires alternées, et que cet endomorphisme est compatible (dans un sens que l'on précisera) avec les actions naturelles de $O(E)$ sur $\mathrm{End}(E)$ et $\bigwedge^2 E^*$.
b) On suppose que E est *orienté*. On rappelle que dans ce cas la p–forme $\omega = e_1^* \wedge \cdots e_p^*$ ne dépend pas de la base orthonormée directe $(e_1, \cdots, e_p)$ (ici $p = \dim(E)$). Si de plus p est pair, $\mathrm{Pf}(u)$ est le nombre défini par

$$(u^\flat)^{\wedge \frac{p}{2}} = \mathrm{Pf}(u)\omega.$$

(cette notation et le nom de pfaffien font référence au mathématicien Johan Friedrich Pfaff, qui fut le directeur de thèse de Carl–Friedrich Gauss.) Ainsi, $u \mapsto \mathrm{Pf}(u)$ est un polynôme de degré $\frac{p}{2}$ sur l'espace vectoriel des endomorphismes antiymétriques.
Montrer que $\det(u) = \big(\mathrm{Pf}(u)\big)^2$. Indication : utiliser la réduction des endomorphismes antisymétriques.

2. *Plongement de Plucker*
Dans la grassmannienne $G_{p,n}$, soit P un p-plan, et $(x_1, \cdots, x_p)$ une base de P. On associe à cette base le point $[x_1 \wedge \cdots \wedge x_p]$ de l'espace projectif associé à $\bigwedge^p \mathbf{K^n}$ (avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Montrer que l'on définit ainsi une application lisse de $G_{p,n}$ dans $P\left(\bigwedge^p \mathbf{K^n}\right)$, et que cette application est un plongement.