Exercices supplémentaires du chapitre 7 : Cohomologie

1. *Un complément à l'exercice 17 du chapitre 7 (cohomologie des groupes de Lie)*
Dans tout l'exercice sauf en a), G est un groupe de Lie compact et connexe.
a) Soit G un groupe de Lie connexe, $\mathfrak{G}$ son algèbre de Lie. Montrer que le centre Z de G est un sous–groupe de Lie, d'algèbre de Lie

$$\mathfrak{Z} = \{X, [X,Y] = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{G}\}.$$

b) Si G est compact, montrer qu'il existe sur $\mathfrak{G}$ un produit scalaire $\mathrm{Ad}(G)$–invariant.
c) On désigne par $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ le sous–espace vectoriel de $\mathfrak{G}$ engendré par les crochets d'éléments de $\mathfrak{G}$. Montrer que

$$\mathfrak{Z} = [\mathfrak{G},\mathfrak{G}]^{\perp}.$$

(il s'agit de l'orthogonal pour l'un des produits scalaires vu en c)).
d) En déduite que $\dim H^1(G,\mathbf{R}) = \dim(Z)$.
e) Montrer que si $H^1(G,\mathbf{R})$ est nul, il en est de même de $H^2(G,\mathbf{R})$.

2. Dans une variété M de dimension n, soit U un ouvert difféomorphe à $\mathbf{R}^n$, et V un ouvert tel que $\overline{V}$ soit un compact inclus dans U. Montrer que pour toute forme fermée α sur M, on peut trouver une forme β de la même classe de cohomologie nulle sur $\overline{V}$.