

EXTRAITS

# Analyse numérique et équations différentielles

## Grenoble Sciences

Grenoble Sciences est un centre de conseil, expertise et labellisation de l'enseignement supérieur français. Il expertise les projets scientifiques des auteurs dans une démarche à plusieurs niveaux (référés anonymes, comité de lecture interactif) qui permet la labellisation des meilleurs projets après leur optimisation. Les ouvrages labellisés dans une collection de Grenoble Sciences correspondent à :

- ▶ des projets clairement définis sans contrainte de mode ou de programme,
- ▶ des qualités scientifiques et pédagogiques certifiées par le mode de sélection,
- ▶ une qualité de réalisation assurée par le centre technique de Grenoble Sciences.

### Directeur scientifique de Grenoble Sciences

Jean Bornarel, Professeur émérite à l'Université Grenoble Alpes

Pour mieux connaître Grenoble Sciences :

<https://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr>

Pour contacter Grenoble Sciences :

tél : (33) 4 76 51 46 95, e-mail : [grenoble.sciences@ujf-grenoble.fr](mailto:grenoble.sciences@ujf-grenoble.fr)

### Livres et pap-ebooks

Grenoble Sciences labellise des livres papier (en langue française et en langue anglaise) mais également des ouvrages utilisant d'autres supports. Dans ce contexte, situons le concept de pap-ebook. Celui-ci se compose de deux éléments :

- ▶ un **livre papier** qui demeure l'objet central,
- ▶ un **site web compagnon** qui propose :
  - des éléments permettant de combler les lacunes du lecteur qui ne posséderait pas les prérequis nécessaires à une utilisation optimale de l'ouvrage,
  - des exercices pour s'entraîner,
  - des compléments pour approfondir un thème, trouver des liens sur internet, etc.

Le livre du pap-ebook est autosuffisant et certains lecteurs n'utiliseront pas le site web compagnon. D'autres l'utiliseront et ce, chacun à sa manière. Un livre qui fait partie d'un pap-ebook porte en première de couverture un logo caractéristique et le lecteur trouvera le site compagnon du présent ouvrage à l'adresse internet suivante :

<https://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr/pap-ebook/demailly>



Grenoble Sciences bénéficie du soutien de la **région Auvergne-Rhône-Alpes** et du **ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche**. Grenoble Sciences est rattaché à l'**Université Grenoble Alpes**.

ISBN 978 2 7598 1926 3

© EDP Sciences 2016

# Analyse numérique et équations différentielles

Jean-Pierre Demailly



17, avenue du Hoggar  
Parc d'Activité de Courtabœuf - BP 112  
91944 Les Ulis Cedex A - France

## Analyse numérique et équations différentielles

Cet ouvrage, labellisé par Grenoble Sciences, est un des titres du secteur Mathématiques de la collection Grenoble Sciences d'EDP Sciences, qui regroupe des projets originaux et de qualité. Cette collection est dirigée par Jean Bornarel, Professeur émérite à l'Université Grenoble Alpes.

Comité de lecture de l'édition précédente :

- ▶ M. Artigue, Professeur à l'IUFM de Reims,
- ▶ A. Dufresnoy, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1,
- ▶ J.R. Joly, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1,
- ▶ M. Rogalski, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies, Lille 1.

Cette nouvelle édition a été suivie par Stéphanie Trine. L'illustration de couverture est l'œuvre d'Alice Giraud.

### Autres ouvrages labellisés sur des thèmes proches (chez le même éditeur)

Méthodes numériques appliquées pour le scientifique et l'ingénieur (J.-P. Grivet)

- Petit traité d'intégration (J.-Y. Briend)
- Introduction aux variétés différentielles (J. Lafontaine)
- Nombres et algèbre (J.-Y. Mérindol)
- Exercices corrigés d'analyse avec rappels de cours. Tomes I et II (D. Alibert)
- Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et ingénieurs (E. Belorizky)
- Mathématiques pour l'étudiant scientifique. Tomes I et II (P.-J. Haug)
- Mécanique. De la formulation lagrangienne au chaos hamiltonien (C. Gignoux & B. Silvestre-Brac)
- Problèmes corrigés de mécanique et résumés de cours. De Lagrange à Hamilton (C. Gignoux & B. Silvestre-Brac)
- Mathématiques pour les sciences de la Vie, de la Nature et de la Santé (J.-P. Bertrandias & F. Bertrandias)
- Description de la symétrie. Des groupes de symétrie aux structures fractales (J. Sivardière)
- Symétrie et propriétés physiques. Des principes de Curie aux brisures de symétrie (J. Sivardière)
- Approximation hilbertienne. Splines, ondelettes, fractales (M. Attéia & J. Gaches)
- Analyse statistique des données expérimentales (K. Protassov)
- Introduction à la mécanique statistique (E. Belorizky & W. Gorecki)
- Mécanique statistique. Exercices et problèmes corrigés (E. Belorizky & W. Gorecki)
- Magnétisme : I Fondements, II Matériaux (sous la direction d'E. du Trémolet de Lacheisserie)
- La mécanique quantique. Problèmes résolus. Tomes I et II (V.M. Galitski, B.M. Karnakov & V.I. Kogan)
- Relativité générale et astrophysique, problèmes et exercices corrigés (Denis Gialis & François-Xavier Désert)
- Éléments de Biologie à l'usage d'autres disciplines. De la structure aux fonctions (P. Tracqui & J. Démongeot)
- Minimum Competence in Scientific English (S. Blattes, V. Jans & J. Upjohn)

et d'autres titres sur le site internet  
<https://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr>

## 1.6. Cumulation d'erreurs d'arrondi aléatoires

Les majorations d'erreurs que nous avons données plus haut pèchent en général par excès de pessimisme, car nous n'avons tenu compte que de la valeur absolue des erreurs, alors qu'en pratique elles sont souvent de signe aléatoire et se compensent donc partiellement entre elles.

Supposons par exemple qu'on cherche à calculer une somme  $s_n$  de rang élevé d'une série convergente  $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ , les  $u_k$  étant des réels  $\geq 0$  supposés représentés sans erreur. On pose donc

$$s_k = s_{k-1} + u_k, \quad s_0 = u_0,$$

et les erreurs  $\Delta s_k$  vérifient

$$\begin{aligned} \Delta s_k &= \Delta s_{k-1} + \alpha_k \\ \text{avec } \Delta s_0 &= 0 \quad \text{et} \quad |\alpha_k| \leq \varepsilon(s_{k-1} + u_k) = \varepsilon s_k \leq \varepsilon S. \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\Delta s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

et en particulier  $|\Delta s_n| \leq n\varepsilon S$ . Dans le pire des cas, l'erreur est donc proportionnelle à  $n$ . On va voir qu'on peut en fait espérer beaucoup mieux sous des hypothèses raisonnables.

### Hypothèses.

- (1) *Les erreurs  $\alpha_k$  sont des variables aléatoires globalement indépendantes les unes des autres (lorsque les  $u_k$  sont choisis aléatoirement).*
- (2) *L'espérance mathématique  $E(\alpha_k)$  est nulle, ce qui signifie que les erreurs d'arrondi n'ont aucune tendance à se faire par excès ou par défaut.* ▀

L'hypothèse (2) entraîne  $E(\Delta s_n) = 0$  tandis que l'hypothèse (1) donne

$$\text{var}(\Delta s_n) = \text{var}(\alpha_1) + \dots + \text{var}(\alpha_n).$$

Comme  $E(\alpha_k) = 0$  et  $|\alpha_k| \leq \varepsilon S$ , on a  $\text{var}(\alpha_k) \leq \varepsilon^2 S^2$ , d'où

$$\sigma(\Delta s_n) = \sqrt{\text{var}(\Delta s_n)} \leq \sqrt{n}\varepsilon S$$

L'erreur quadratique moyenne croît seulement dans ce cas comme  $\sqrt{n}$ . D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a :

$$P(|\Delta s_n| \geq \alpha \sigma(\Delta s_n)) \leq \alpha^{-2}.$$

La probabilité que l'erreur dépasse  $10\sqrt{n}\varepsilon S$  est donc inférieure à 1%.

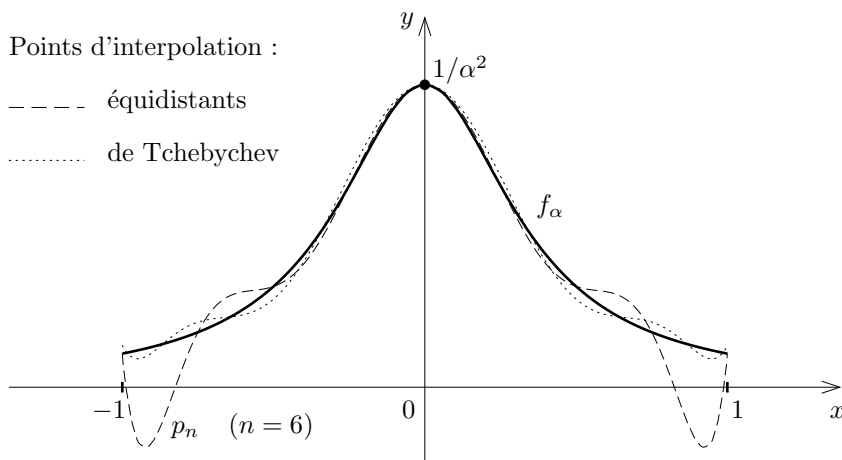
**Corollaire.** *On suppose que  $f$  est lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $K \geq 0$  telle que  $\forall x, y \in [a, b]$  on ait  $|f(x) - f(y)| \leq K(x - y)$ . Alors la suite  $L_n(f)$  des polynômes d'interpolation de Tchebychev converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ .* ▀

Sous ces hypothèses on a en effet  $\omega_f(t) \leq Kt$ , donc

$$\|f - L_n(f)\| \leq KC'(b - a) \frac{\ln(n)}{n + 2},$$

ce qui tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . □

Ces résultats montrent que *l'interpolation aux points de Tchebychev est considérablement plus fiable que l'interpolation en des points équidistants*. Le schéma ci-dessous compare à titre d'exemple les polynômes d'interpolation de degré 6 associés à la fonction  $f(x) = 1/(x^2 + \alpha^2)$  pour  $\alpha = \sqrt{8}$  (voir aussi le § 2.3).



## 5. Polynômes orthogonaux

Soit  $]a, b[$  un intervalle ouvert borné ou non dans  $\mathbb{R}$ . On se donne *un poids* sur  $]a, b[$ , c'est-à-dire une fonction  $w : ]a, b[ \rightarrow ]0, +\infty[$  continue. On suppose en outre que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  l'intégrale  $\int_a^b |x|^n w(x) dx$  est convergente ; c'est le cas par exemple si  $]a, b[$  est borné et si  $\int_a^b w(x) dx$  converge. Sous ces hypothèses, on considère l'espace vectoriel  $E$  des fonctions continues sur  $]a, b[$  telles que

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx} < +\infty.$$

### 3. Méthodes de Gauss

Les méthodes de Gauss concernent le calcul numérique d'intégrales faisant intervenir un poids. Elles constituent une application directe de la théorie des polynômes orthogonaux.

#### 3.1. Description et formule d'erreur

Soit  $w$  une fonction poids fixée sur  $] \alpha, \beta [$ . On étudie les méthodes d'intégration approchée du type

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)w(x)dx \simeq \sum_{j=0}^l \lambda_j f(x_j), \quad x_j \in [\alpha, \beta].$$

**Théorème 1.** *Il existe un choix et un seul des points  $x_j$  et des coefficients  $\lambda_j$  de sorte que la méthode soit d'ordre  $N = 2l + 1$ . Les points  $x_j$  appartiennent à  $] \alpha, \beta [$  et sont les racines du  $(l + 1)$ -ième polynôme orthogonal pour le poids  $w$ .* ▣

**Unicité.** Supposons qu'on ait des points  $x_j$  et des coefficients  $\lambda_j$  pour lesquels la méthode est d'ordre  $\geq 2l + 1$ . Posons

$$\pi_{l+1}(x) = \prod_{j=0}^l (x - x_j).$$

Pour tout  $p \in \mathcal{P}_l$ ,  $\deg(p\pi_{l+1}) \leq 2l + 1$ , donc

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(x)\pi_{l+1}(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^l \lambda_j p(x_j)\pi_{l+1}(x_j) = 0.$$

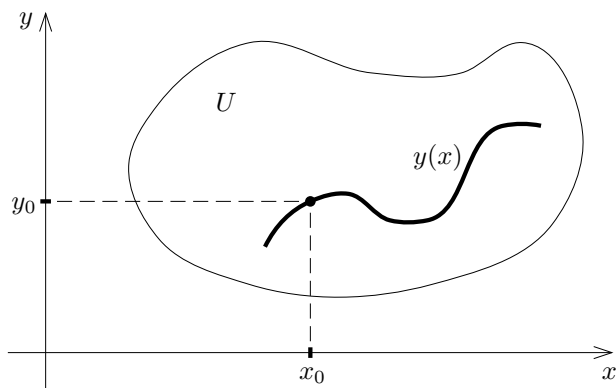
Ceci entraîne que  $\pi_{l+1}$  est orthogonal à  $\mathcal{P}_l$ . Comme  $\pi_{l+1}$  est unitaire, c'est donc le  $(l + 1)$ -ième polynôme orthogonal associé au poids  $w$ . Les points  $x_j$  ne sont autres que les racines de ce polynôme.

Soit  $L_i \in \mathcal{P}_l$  tel que  $\begin{cases} L_i(x_j) = 1 & \text{si } i = j, \\ L_i(x_j) = 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

Les coefficients  $\lambda_i$  sont donnés nécessairement par

$$\lambda_i = \sum_{j=0}^l \lambda_j L_i(x_j) = \int_{\alpha}^{\beta} L_i(x)w(x)dx.$$

Ces coefficients sont donc eux aussi uniques. □

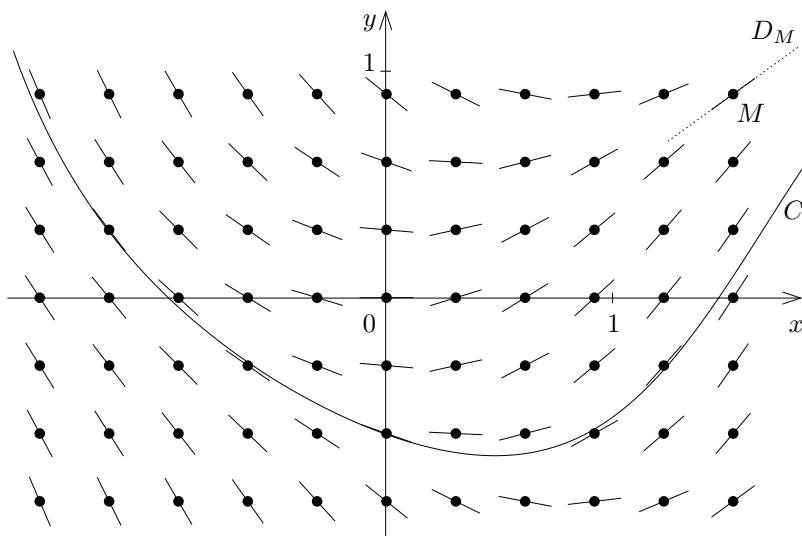


Résoudre le problème de Cauchy revient à trouver une « *courbe intégrale* » de (E) passant par un point donné  $(x_0, y_0) \in U$ .

**Champ des tangentes.** A tout point  $M = (x_0, y_0)$ , on associe la droite  $D_M$  passant par  $M$  et de coefficient directeur  $f(x_0, y_0)$  :

$$D_M : y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

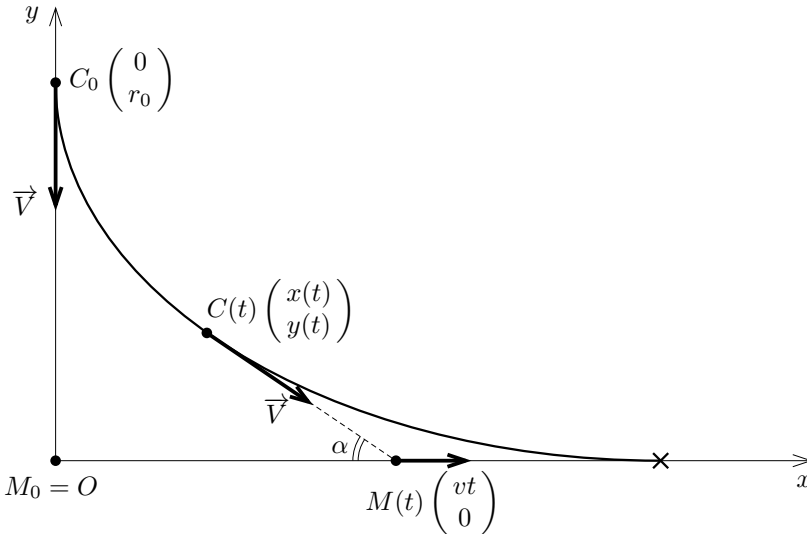
L'application  $M \rightarrow D_M$  est appelée *champ des tangentes* associé à l'équation (E). Une courbe intégrale de (E) est une courbe différentiable  $C$  qui a pour tangente en chaque point  $M \in C$  la droite  $D_M$  du champ des tangentes. L'exemple ci-dessous correspond à l'équation  $y' = f(x, y) = x - y^2$ .





### 3.3. Courbe de poursuite du chien

Nous présentons ici la célèbre « courbe du chien » comme exemple de courbe de poursuite. Voici le problème : un chien et son maître se déplacent l'un et l'autre à des vitesses scalaires constantes  $V$  (pour le chien) et  $v$  (pour le maître), avec  $V > v$ . On suppose que le maître se déplace en ligne droite, disons sur l'axe  $Ox$ , dans la direction positive, suivant la loi  $x = vt$ . A l'instant  $t = 0$ , le chien se trouve au point  $x = 0, y = r_0$ , à distance  $r_0$  du maître. Le chien cherche à rejoindre son maître en pointant son vecteur vitesse  $\vec{V}$  en direction du maître. Le problème est de déterminer la loi du mouvement  $C(t)$  du chien.



Notons  $\alpha$  l'angle (non orienté)  $\alpha = (Ox, \overrightarrow{CM})$  et  $r = \|\overrightarrow{CM}\|$  ; on a bien entendu  $\alpha = \alpha(t)$  et  $r = r(t)$ . Comme d'habitude en physique, on désignera par des points surplignants les dérivées temporelles  $\dot{r}(t) = dr/dt, \dot{\alpha}(t) = d\alpha/dt, \dots$ . A l'instant  $t$ , la position et la vitesse du chien sont données par

$$\begin{cases} x(t) = vt - r \cos \alpha, & \dot{x}(t) = v - \dot{r} \cos \alpha + r \dot{\alpha} \sin \alpha = V \cos \alpha, \\ y(t) = r \sin \alpha, & \dot{y}(t) = \dot{r} \sin \alpha + r \dot{\alpha} \cos \alpha = -V \sin \alpha, \end{cases}$$

Ces équations fournissent aisément l'expression de  $\dot{r}$  et  $r \dot{\alpha}$  :

$$\begin{cases} \dot{r} = v \cos \alpha - V, \\ r \dot{\alpha} = -v \sin \alpha. \end{cases}$$

En prenant le quotient on élimine  $dt$  et on trouve donc

$$\frac{dr}{r d\alpha} = -\cotan \alpha + \frac{V}{v} \frac{1}{\sin \alpha}.$$

**Exemple.** Une particule de masse  $m$  et de charge électrique  $q$  se déplace dans  $\mathbb{R}^3$  sous l'action d'un champ magnétique  $\vec{B}$  et d'un champ électrique  $\vec{E}$  uniformes et indépendants du temps. Quelle est la trajectoire de la particule ?

Si  $\vec{V}$  et  $\vec{\gamma}$  désignent respectivement la vitesse et l'accélération, la loi de Lorentz et le principe fondamental de la dynamique donnent l'équation

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} = q\vec{V} \wedge \vec{B} + q\vec{E},$$

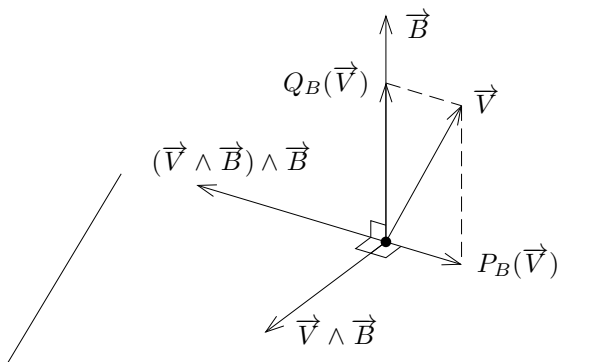
d'où

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{V} \wedge \vec{B} + \frac{q}{m} \vec{E}.$$

Il s'agit d'un système linéaire où la matrice  $A$  (à coefficients constants) est la matrice de l'application linéaire  $\vec{V} \mapsto \frac{q}{m} \vec{V} \wedge \vec{B}$ . On confondra dans la suite  $A$  avec cette application linéaire. Un calcul simple montre que

$$A^2(\vec{V}) = \left(\frac{q}{m}\right)^2 (\vec{V} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} = -\left(\frac{q}{m}\right)^2 B^2 P_B(\vec{V})$$

où  $B = \|\vec{B}\|$  et où  $P_B$  désigne la projection orthogonale sur le plan vectoriel de vecteur normal  $\vec{B}$ . Le schéma est le suivant :



On observe pour le calcul que  $\vec{V} \wedge \vec{B} = P_B(\vec{V}) \wedge \vec{B}$ . On en déduit alors facilement

$$A^{2p}(\vec{V}) = (-1)^p \left(\frac{q}{m}\right)^{2p} B^{2p} P_B(\vec{V}), \quad p \geq 1$$

$$A^{2p+1}(\vec{V}) = (-1)^p \left(\frac{q}{m}\right)^{2p+1} B^{2p} \vec{V} \wedge \vec{B},$$

# 1. Définition des méthodes à un pas, exemples

## 1.1. Définitions

Les méthodes à un pas sont les méthodes de résolution numérique qui peuvent s'écrire sous la forme

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n), \quad 0 \leq n < N,$$

où  $\Phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction que l'on supposera continue. Dans la pratique, la fonction  $\Phi(t, y, h)$  peut n'être définie que sur une partie de la forme  $[t_0, t_0 + T] \times J \times [0, \delta]$  où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  (de sorte en particulier que  $[t_0, t_0 + T] \times J$  soit contenu dans le domaine de définition de l'équation différentielle).

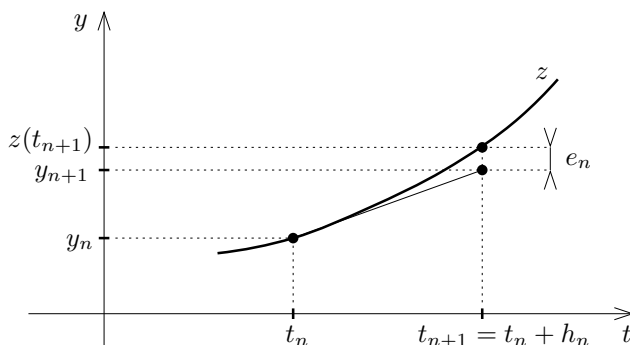
**Exemple.** La méthode d'Euler est la méthode à un pas associée à la fonction  $\Phi(t, y, h) = f(t, y)$ , et définie par la formule de récurrence  $y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n)$  (voir chapitre V, § 2.3).

**Définition.** L'erreur de consistance  $e_n$  relative à une solution exacte  $z$  est l'erreur

$$e_n = z(t_{n+1}) - y_{n+1}, \quad 0 \leq n < N$$

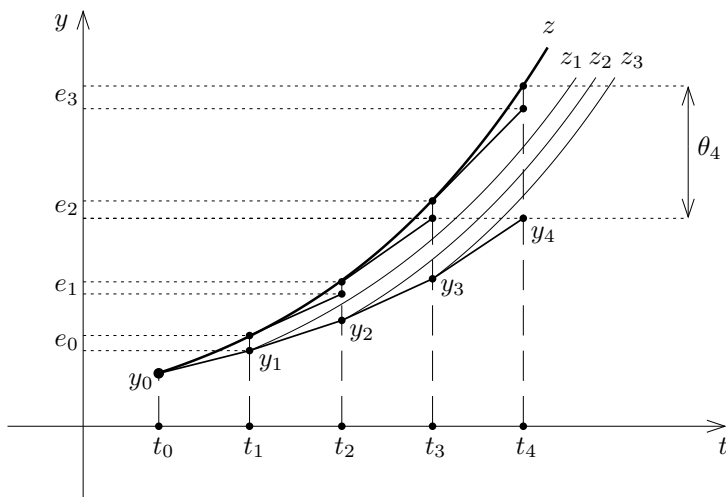
produite par application de l'algorithme  $y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n)$  à partir de la valeur  $y_n = z(t_n)$ . Autrement dit, cette erreur mesure l'écart entre la valeur exacte  $z(t_{n+1})$  au temps  $t_{n+1}$ , et la valeur approchée  $y_{n+1}$  issue de la valeur  $y_n = z(t_n)$  prise comme valeur initiale au temps  $t_n$  (une seule étape de l'algorithme est donc mise en jeu). En termes de la fonction  $\Phi$ , on a

$$e_n = z(t_{n+1}) - z(t_n) - h_n \Phi(t_n, z(t_n), h_n). \quad \blacksquare$$



Comme le montre le schéma ci-dessous, l'erreur de consistance n'a a priori que peu de rapport avec l'erreur globale  $\theta_n = \max_{0 \leq j \leq n} |z(t_j) - y_j|$  résultant d'un calcul de  $n$

valeurs successives  $y_1, \dots, y_n$  à partir de la donnée initiale  $y_0 = z(t_0)$  (qui est à vrai dire la seule erreur intéressant réellement le numéricien). On imagine cependant, et nous reviendrons là-dessus plus en détail au § 2, que  $|\theta_n|$  sera de l'ordre de grandeur de  $|e_0| + |e_1| + \dots + |e_{n-1}|$ , sous des hypothèses convenables de régularité pour la fonction  $f$ . C'est pourquoi l'évaluation de  $e_n$  va gouverner l'évaluation de l'erreur globale.



[Les fonctions  $z, z_1, z_2, z_3$  représentent ici les solutions exactes passant par les points  $(t_0, y_0)$  et  $(t_j, y_j)$ ,  $j = 1, 2, 3$ ].

## 1.2. Retour sur la méthode d'Euler

Soit  $z$  une solution exacte de l'équation (E). On a au premier ordre l'approximation

$$z(t_{n+1}) = z(t_n + h_n) \simeq z(t_n) + h_n z'(t_n) = z(t_n) + h_n f(t_n, z(t_n)).$$

Comme on l'a déjà vu au chapitre V, ceci conduit à l'algorithme

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) \\ t_{n+1} = t_n + h_n. \end{cases}$$

Par définition de l'erreur de consistance, on a  $e_n = z(t_n + h_n) - y_{n+1}$  où

$$y_{n+1} = z(t_n) + h_n f(t_n, z(t_n)) = z(t_n) + h_n z'(t_n).$$

La formule de Taylor-Lagrange donne

$$e_n = z(t_n + h_n) - (z(t_n) + h_n z'(t_n)) = \frac{1}{2} h_n^2 z''(t_n) + o(h_n^2),$$

Il en résulte finalement

$$\begin{aligned} |y_{n+1}^* - y_{n+1}| &\leq |b_{n,-1,r}^*| kh_n (|pe_n| + |e_n^*|) \\ |e_n| &\leq |e_n^*| + |y_{n+1}^* - y_{n+1}| \\ |e_n| &\leq (1 + |b_{n,-1,r}^*| kh_n) |e_n^*| + |b_{n,-1,r}^*| kh_n |pe_n|. \end{aligned}$$

On voit que l'influence du prédicteur est nettement moindre que celle du correcteur puisque son erreur de consistance est en facteur d'un terme  $O(h_n)$ . Le *correcteur*  $AM_{r+1}$  étant d'ordre  $r + 2$  (c'est-à-dire  $|e_n^*| \leq Ch_n h_{\max}^{r+2}$ ), on voit qu'il convient de choisir un prédicteur d'ordre  $r + 1$ . Les contributions de  $|e_n^*|$  et  $|pe_n|$  dans  $|e_n|$  seront alors toutes deux  $\leq Ch_n h_{\max}^{r+2}$ , l'ordre global de PECE est donc  $r + 2$  dans ce cas.

### 4.3. Exemples

- **Prédicteur : Euler (ordre 1), Correcteur :  $AM_1$  (ordre 2).**

$$\begin{cases} P : & py_{n+1} = y_n + h_n f_n \\ E : & pf_{n+1} = f(t_{n+1}, py_{n+1}) \\ C : & y_{n+1} = y_n + h_n \left( \frac{1}{2} pf_{n+1} + \frac{1}{2} f_n \right) \\ E : & f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

Cet algorithme coïncide avec la méthode de Heun, qui n'est autre que la méthode de Runge-Kutta définie par

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}.$$

- **Prédicteur : Nyström (ordre 2) avec pas constant  $h_n = h$ , Correcteur :  $AM_2$  (ordre 3).**

$$\begin{cases} P : & py_{n+1} = y_{n-1} + 2hf_n \\ E : & pf_{n+1} = f(t_{n+1}, py_{n+1}) \\ C : & y_{n+1} = y_n + h \left( \frac{5}{12} pf_{n+1} + \frac{8}{12} f_n - \frac{1}{12} f_{n-1} \right) \\ E : & f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

- **Prédicteur :  $AB_{r+1}$  (ordre  $r + 1$ ), Correcteur :  $AM_{r+1}$  (ordre  $r + 2$ ).**

$$\begin{cases} P : & py_{n+1} = y_n + h_n \sum_{0 \leq i \leq r} b_{n,i,r} f_{n-i} \\ E : & pf_{n+1} = f(t_{n+1}, py_{n+1}) \\ C : & y_{n+1} = y_n + h_n \left( b_{n,-1,r}^* pf_{n+1} + \sum_{0 \leq i \leq r} b_{n,i,r}^* f_{n-i} \right) \\ E : & f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}). \end{cases}$$

**Définition.** Soit  $y(t, z)$  la solution maximale de (E) tel que  $y(t_0, z) = z$ . On dira que la solution  $y(t, z_0)$  est stable s'il existe une boule  $\overline{B}(z_0, r)$  et une constante  $C \geq 0$  telles que

(i) Pour tout  $z \in \overline{B}(z_0, r)$ ,  $t \mapsto y(t, z)$  est définie sur  $[t_0, +\infty[$  ;

(ii) Pour tous  $z \in \overline{B}(z_0, r)$  et  $t \geq t_0$  on a

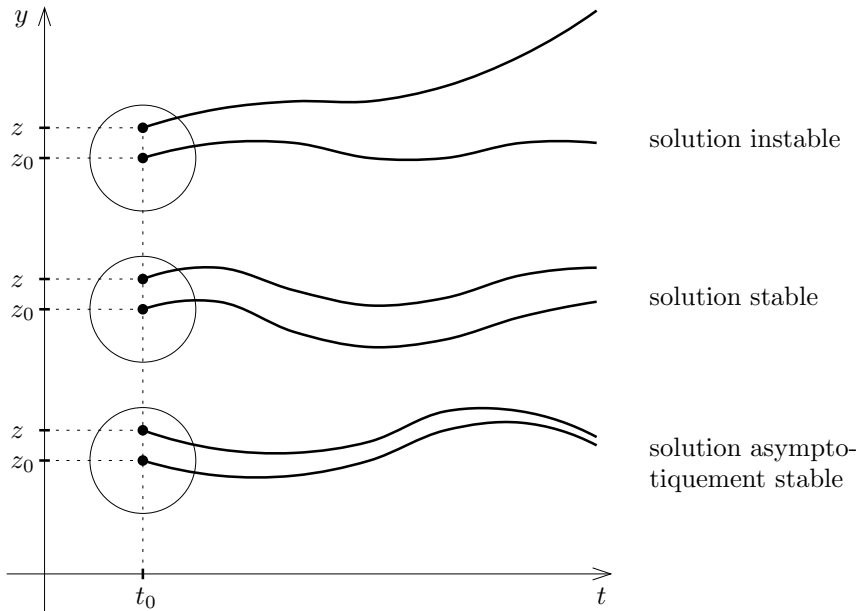
$$\|y(t, z) - y(t, z_0)\| \leq C\|z - z_0\|.$$

La solution  $y(t, z_0)$  est dite asymptotiquement stable si elle est stable et si la condition (ii') plus forte que (ii) est satisfaite :

(ii') Il existe une boule  $\overline{B}(z_0, r)$  et une fonction  $\gamma : [t_0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue avec  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = 0$  telles que pour tous  $z \in \overline{B}(z_0, r)$  et  $t \geq t_0$  on ait

$$\|y(t, z) - y(t, z_0)\| \leq \gamma(t)\|z - z_0\|.$$

La signification géométrique de ces notions de stabilité est illustrée par le schéma suivant.



Nous nous proposons maintenant d'étudier les différentes configurations possibles pour un point singulier non dégénéré. On verra au chapitre XI, § 2.3 que les courbes intégrales ont tendance à ressembler à celles du système linéaire  $dM/dt = AM$  lorsqu'on se rapproche du point critique, tout au moins sur un intervalle de temps  $[t_0, t_1]$  fixé ; ceci n'est pas nécessairement vrai sur tout l'intervalle  $[t_0, +\infty[$  (voir § 2.3 pour des exemples). On se restreindra dans un premier temps au cas linéaire.

## 2.2. Cas d'un champ linéaire de vecteurs

Considérons le système

$$\frac{dM}{dt} = AM, \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On supposera  $\det A \neq 0$ , de sorte que le champ de vecteurs  $\vec{V}(M) = AM$  admet l'origine pour seul point critique. Comme le champ des tangentes est invariant par les homothéties de centre  $O$ , les courbes intégrales se déduisent les unes des autres par homothéties. Distinguons maintenant plusieurs cas en fonction des valeurs propres de  $A$ .

### (a) Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2$ de $A$ sont réelles.

• Supposons de plus  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Dans ce cas la matrice  $A$  est diagonalisable. Après changement de base on peut supposer

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et le système se réduit à

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_1 x \\ \frac{dy}{dt} = \lambda_2 y. \end{cases}$$

La solution du problème de Cauchy avec  $M(0) = (x_0, y_0)$  est donc

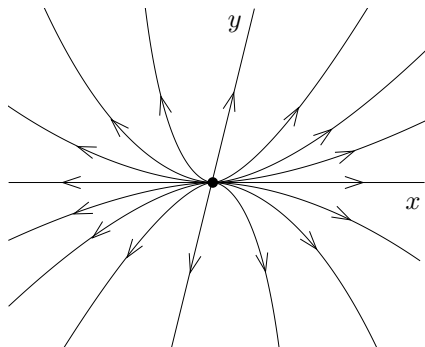
$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

de sorte que les courbes intégrales sont les courbes

$$y = C|x|^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad C \in \mathbb{R}$$

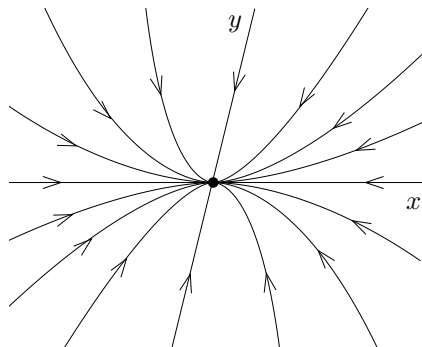
et la droite d'équation  $x = 0$ . On distingue deux sous-cas.

\*  $\lambda_1, \lambda_2$  de même signe et, disons,  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ . On a alors  $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ . On dit qu'on a affaire à un *nœud impropre* :



$$0 < \lambda_1 < \lambda_2$$

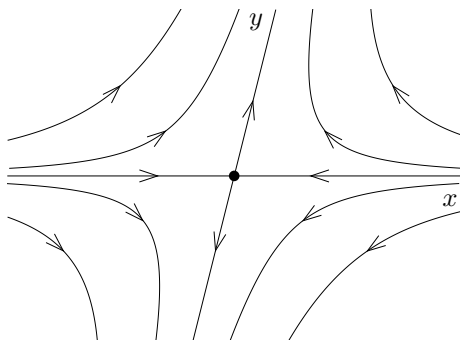
nœud impropre instable



$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$$

nœud impropre stable

\*  $\lambda_1, \lambda_2$  de signes opposés, par exemple  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Il s'agit d'un *col* (toujours instable) :



- Les valeurs propres sont confondues :  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Deux cas sont possibles :

\*  $A$  est diagonalisable. Alors  $A$  est en fait diagonale et les courbes intégrales sont données par

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda t}, \end{cases}$$

ce sont les droites  $y = \alpha x$  et  $x = 0$ . On dit qu'on a affaire à un *nœud propre* :