

**APPROXIMATION  
HILBERTIENNE**

**SPLINES - ONDELETTES - FRACTALES**

**Marc ATTÉIA et Jean GACHES**

**Presses Universitaires de Grenoble**

**1999**

## ***Grenoble Sciences***

Grenoble Sciences fut créé avec le triple objectif de :

- réaliser des ouvrages correspondant à un projet clairement défini, sans contrainte de mode ou de programme,
- garantir les qualités scientifique et pédagogique,
- proposer des ouvrages à un prix accessible au public le plus large possible.

Chaque projet est sélectionné au niveau de la direction de Grenoble Sciences, puis par un collège de referees anonymes. Ensuite, les auteurs travaillent pendant une année (en moyenne) avec les membres d'un comité de lecture interactif dont les noms apparaissent au début de l'ouvrage.

### ***Directeur scientifique de Grenoble Sciences***

Jean BORNAREL, Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1

### ***Comité de lecture pour « Approximation hilbertienne » :***

- ◆ **S. DUBUC**, Professeur à l'Université de Montréal, Canada
- ◆ **P.J. LAURENT**, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble
- ◆ **M.L. MAZURE**, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble

Grenoble Sciences reçoit le soutien :

du **Ministère de l'Éducation nationale, de la Recherche et de la Technologie**  
de la **Région Rhône-Alpes**  
du **Conseil général de l'Isère**  
de la **Ville de Grenoble**

Réalisation et mise en pages, Société LASERTEX, Micropolis, Gap  
Centre technique Grenoble Sciences

**ISBN 2.7061.0860.6**

Copyright : Presses Universitaires de Grenoble  
B.P. 47 – 38040 Grenoble Cedex 9

# **EXTRAITS**

De même, le problème  $(\Pi_4)$  est un cas particulier du problème suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*, \text{ trouver } x \in \mathcal{H}^m(a, b), \text{ solution de :} \\ \inf \left\{ \lambda \|u(y)\|_{\mathcal{K}}^2 + \mu \|v(y) - z\|_{\mathcal{L}}^2 \ ; \ y \in \mathcal{H} \right\} . \end{array} \right.$$

En effet, il suffit pour le vérifier de supposer que :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^m(a, b), \quad \mathcal{K} = \mathcal{L}^2(a, b), \quad \mathcal{L} = \mathbb{R}^{n+1}$$

$$z = (\alpha_0, \dots, \alpha_n); \quad \forall y \in \mathcal{H}, \quad u(y) = y^{(m)} \quad \text{et} \quad v(y) = (y(t_0), \dots, y(t_n)).$$

Dans la suite, nous allons étudier le problème  $(\Pi_3)$ . Nous montrerons comment l'on peut calculer la fonction spline à partir du noyau de  $\mathcal{H}^m(a, b)$ .

L'étude du problème  $(\Pi_4)$  ne présente aucune difficulté lorsqu'on a fait celle du problème  $(\Pi_3)$ . D'un point de vue pédagogique, il nous a paru préférable d'étudier le problème  $(\Pi_3)$  et de laisser au lecteur le soin de résoudre le problème  $(\Pi_4)$ .

## 2. SPLINE POLYNOMIALE MINIMISANTE D'INTERPOLATION

### 2.1 EXISTENCE DE LA SOLUTION DU PROBLÈME $(\Pi_3)$

Choisissons  $m$  éléments distincts  $\bar{t}_0, \dots, \bar{t}_{m-1}$  dans l'ensemble  $\{t_0, \dots, t_n\}$ .

Notons  $\bar{U}$ , l'ensemble des fonctionnelles  $\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_{m-1}$  telles que

$$\forall x \in \mathcal{H}^m(a, b), \quad \bar{u}_j(x) = x(\bar{t}_j), \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Munissons  $\mathcal{H}^m(a, b)$  du produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{m, \bar{U}}$  tel que :

$$\forall x, y \in \mathcal{H}^m(a, b) \quad \langle x | y \rangle_{m, \bar{U}} = \sum_{j=0}^{m-1} x(\bar{t}_j) \cdot y(\bar{t}_j) + \int_a^b x^{(m)}(t) \cdot y^{(m)}(t) dt$$

et désignons par  $\|\cdot\|_{m, \bar{U}} = (\langle \cdot | \cdot \rangle_{m, \bar{U}})^{\frac{1}{2}}$  sa norme associée.

Pour  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , posons :

$$\mathcal{M}(\alpha) = \{ y \in \mathcal{H}^m(a, b) : y(t_j) = \alpha_j, \quad j = 0, \dots, n \}.$$

Il est facile de vérifier que le problème  $(\Pi_3)$  est équivalent au problème suivant :

$$(\text{II}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{trouver } x \in \mathcal{H}^m(a, b), \text{ solution du problème :} \\ \inf \{ \|y\|_{m, \bar{U}} \ ; \ y \in \mathcal{M}(\alpha) \} . \end{array} \right.$$

Prouvons que le problème (II) a une solution et une seule.

Pour cela, vérifions d'abord que  $\mathcal{M}(\alpha)$  n'est pas vide.

On sait qu'il existe un polynôme  $P_\alpha$  de degré inférieur ou égal à  $n$  tel que :

$$P_\alpha(t_j) = \alpha_j \quad , \quad j = 0, \dots, n.$$

Si  $(a, b)$  est borné alors  $P_\alpha \in \mathcal{M}(\alpha)$ . Dans le cas contraire, pour  $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$  fixé, on considère la fonction  $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  telle que :

$$\forall t \in [t_0, t_n], \quad \rho(t) = 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{[t_0 - \epsilon, t_n + \epsilon]\}, \quad \rho(t) = 0.$$

Alors  $(\rho \cdot P_\alpha)|_{(a, b)} \in \mathcal{M}(\alpha)$ .

Le problème suivant que l'on considère comme "symétrique" de celui des moindres carrés par rapport à celui de l'interpolation polynomiale a été étudié beaucoup plus tardivement que les deux précédents.

$$(\Pi_3) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } x \in \mathcal{H}^m(a, b) \text{ , solution de :} \\ \inf \left\{ \int_a^b |(y^{(m)}(t))dt|^2 \text{ ; } y \in \mathcal{H}^m(a, b) \text{ , } y(t_j) = \alpha_j \text{ , } j = 0, \dots, n \right\} . \end{array} \right.$$

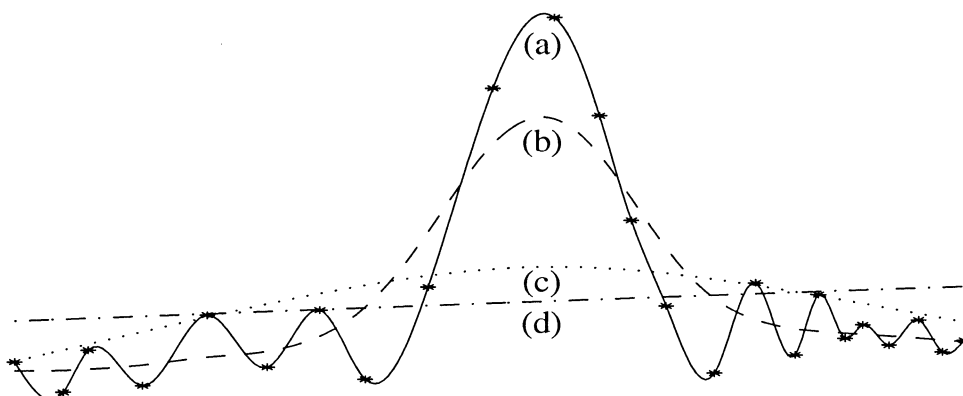
$(\Pi_3)$  est le problème des fonctions splines (minimisantes) polynomiales d'interpolation.

Chacun des trois problèmes précédents peut être déduit du problème suivant, appelé problème des splines (minimisantes) polynomiales d'ajustement :

$$(\Pi_4) \left| \begin{array}{l} \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^* \text{, trouver } x \in \mathcal{H}^m(a, b) \text{ , solution de :} \\ \inf \left\{ \lambda \int_a^b |(y^{(m)}(t))dt|^2 + \mu \sum_{j=0}^n |(y(t_j) - \alpha_j)|^2 \text{ ; } y \in \mathcal{H}^m(a, b) \right\} . \end{array} \right.$$

En effet :

- si  $\lambda$  tend vers 0, alors le problème  $(\Pi_4)$  tend vers le problème  $(\Pi_3)$  ;
- si  $\mu$  tend vers 0, alors le problème  $(\Pi_4)$  tend vers le problème  $(\Pi_2)$  ;
- si  $m = n$ , alors les problèmes  $(\Pi_2)$  et  $(\Pi_3)$  sont équivalents au problème  $(\Pi_1)$ .



$$(a) : \lambda = 0, \mu = 1$$

$$(b) : \lambda = 0.0027, \mu = 1$$

$$(c) : \lambda = 1, \mu = 0.62$$

$$(d) : \lambda = 1, \mu = 0$$

Fig 02 – Le problème  $(\Pi_4)$  pour  $m = 2$  et différentes valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$

On montre que les problèmes  $(\Pi_1)$  ,  $(\Pi_2)$  et  $(\Pi_3)$  sont des cas particuliers du problème "abstrait" suivant :

étant donné trois espaces de Hilbert  $\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{L}$ ,  $u$  (resp.  $v$ ) une application linéaire et continue de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathcal{K}$  (resp. sur  $\mathcal{L}$ ) et  $z \in \mathcal{L}$  ,

$$\left| \begin{array}{l} \text{trouver } x \in \mathcal{H} \text{ , solution de :} \\ \inf \left\{ \|u(y)\|_{\mathcal{K}} \text{ ; } y \in \mathcal{H} \text{ , } v(y) = z \right\} . \end{array} \right.$$

# CHAPITRE IV

## FONCTIONS SPLINES POLYNOMIALES

Composées de morceaux de polynômes, les fonctions splines polynomiales présentent beaucoup moins de rigidité que les polynômes. Pour cela, sous des formes diverses, elles sont devenues depuis deux décennies des outils de base de la modélisation de formes sur ordinateurs.

Dans ce chapitre, nous montrons le lien étroit qui existe entre les fonctions splines polynomiales et certains noyaux hilbertiens. Nous en déduisons “naturellement” toutes les propriétés classiques des fonctions splines polynomiales à une dimension (caractérisation, interpolation, convergence).

La méthode que nous utilisons présente l’avantage de s’étendre sans difficulté à plusieurs dimensions.

Dans tout ce chapitre, on utilisera les données suivantes :

- $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ,
- $n, m \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq m$ ,
- $t_0, \dots, t_n \in (a, b)$  :  $-\infty < t_0 < t_1 < \dots < t_n < +\infty$ ,
- $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ,
- $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ .

### 1. INTRODUCTION

Les deux problèmes suivants  $(\Pi_1)$  et  $(\Pi_2)$  ont été depuis longtemps étudiés.

Le problème de l'interpolation polynomiale.

$$(\Pi_1) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } x \in \mathcal{C}^m(a, b) \text{ , solution de :} \\ x^{(m)} = 0 \quad \underline{\text{et}} \quad x(t_j) = \alpha_j \quad , \quad j = 0, \dots, m - 1. \end{array} \right.$$

Le problème des moindres carrés polynomiaux.

$$(\Pi_2) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } x \in \mathcal{C}^m(a, b) \text{ , solution de :} \\ \inf \left\{ \sum_{j=0}^n |(y(t_j) - \alpha_j)|^2 \ ; \ y \in \mathcal{C}^m(a, b) \quad , \quad y^{(m)} = 0 \right\}. \end{array} \right.$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} K_{m,h}(jh, t) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} K_{m-1,h}(jh - \rho, t) \cdot K_{1,h}(\rho, 0) d\rho \\ &= \int_{\mathbb{R}} K_{m-1,h}(\theta, t) \underbrace{\left[ \sum_{j \in \mathbb{Z}} K_{1,h}(jh, -\theta) \right]}_{h^{-1}} d\theta = h^{-1}. \end{aligned}$$

Puisque  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $K_{m,h}(\bullet, t) \geq 0$ , on déduit que  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $K_{m,h}(\bullet, t) \leq h^{-1}$ . ■

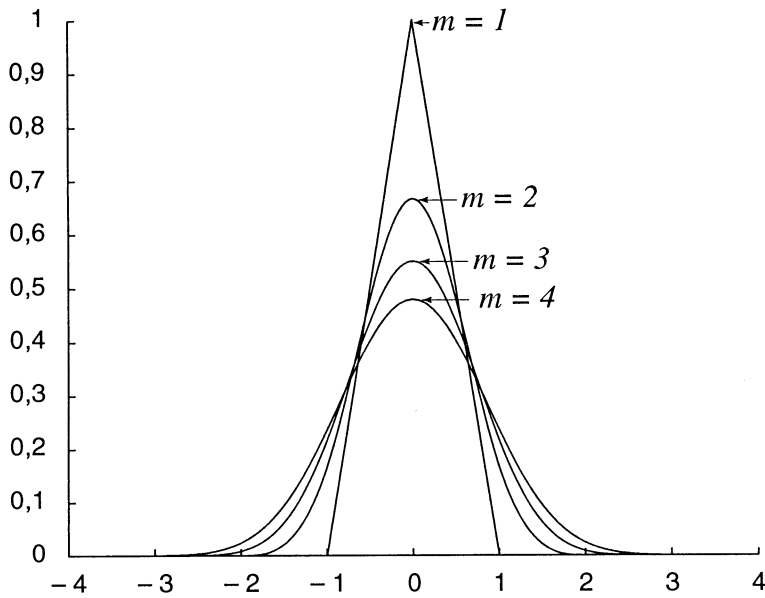


Fig 05 – La fonction  $K_{m,1}(\bullet, 0)$

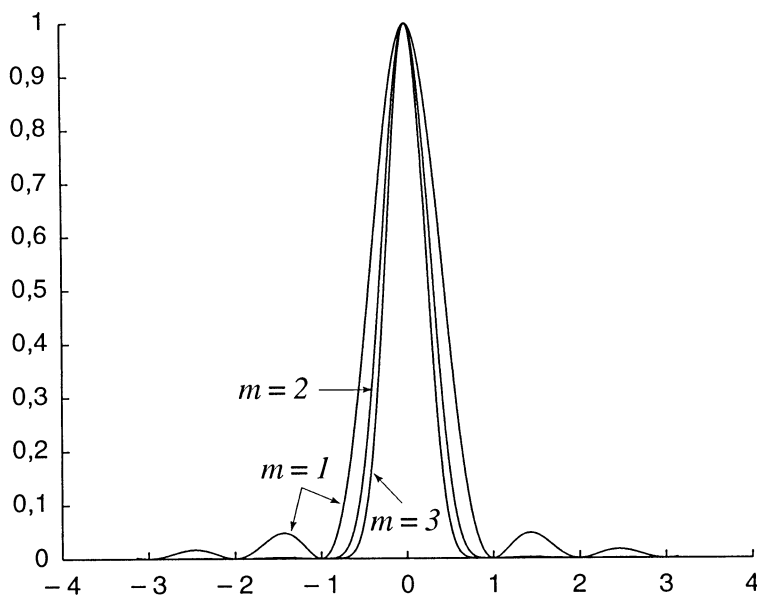


Fig 05bis – La fonction  $\widehat{K}_{m,1}(\bullet, 0)$

et, par conséquent

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad f(t-s) = \overline{f(s-t)}.$$

Ainsi, à toute fonction continue  $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$  de type positif, on peut associer un sous-espace hilbertien de  $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ , ayant pour noyau

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (s, t) \longmapsto f(s-t) \end{array} \right.$$

## 2. TRANSFORMÉE DE FOURIER À “FENÊTRE GLISSANTE”. ONDELETTES

### 2.1 INTRODUCTION

Bien que l'Analyse de Fourier (A.F.) soit, dans de nombreux cas, très performante, elle présente cependant en général des inconvénients irréductibles.

En effet, l'A.F. est une analyse en fréquence et non en temps. De plus, elle est obtenue au moyen de fonctions qui ont pour support la droite réelle tout entière.

Quand la fonction qui détermine le signal est très irrégulière, il faut pour la caractériser connaître les valeurs d'un grand nombre de coefficients de Fourier (alors qu'un petit nombre suffit lorsque cette fonction est régulière).

### 2.2 LA “FENÊTRE GLISSANTE”

Pour analyser localement un signal, on utilise la technique de la “fenêtre glissante”. Celle-ci consiste à tronquer le signal, en multipliant la fonction  $f$  qui le représente, par une fonction  $g$  à support borné ou qui soit “négligeable” en dehors d'un intervalle borné.

Ainsi le calcul de  $\widehat{f}$  est remplacé par celui de  $\widehat{g \cdot f} = \widehat{g} \star \widehat{f}$ . Pour analyser le signal, on déplace la fenêtre sur l'axe des temps. Donnons quelques exemples de fonction  $g$  et  $\widehat{g}$ .

*Exemple 1* – La fonction indicatrice

Soit :  $\mu \in \mathbb{R}_+^*$  et  $g = \mathbb{1}_{[-\mu, \mu]}$ , fonction indicatrice de  $[-\mu, \mu]$ .

Alors,  $\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{g}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\mu\xi)}{\pi\xi} = 2\mu \operatorname{sinc}(2\pi\mu\xi).$

$\widehat{g}$  est un sinus cardinal qui a une infinité d'oscillations.

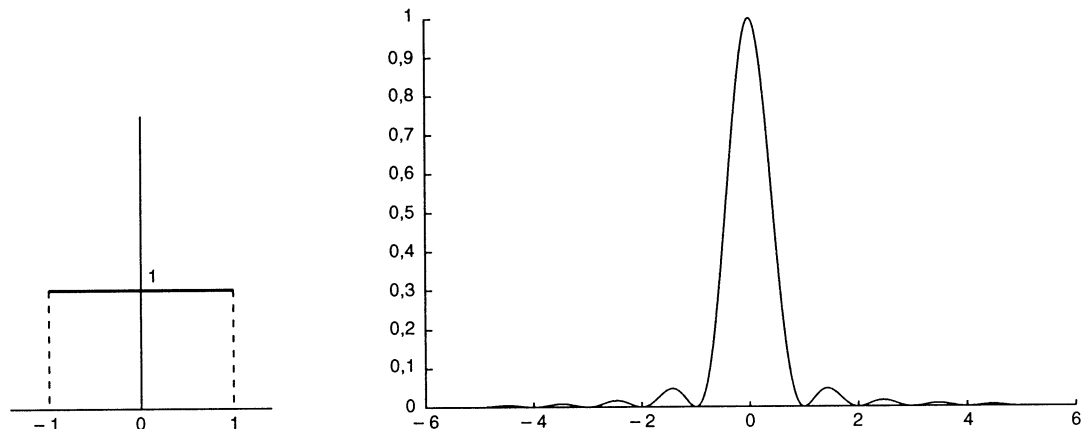


Fig 08 – La fonction indicatrice de  $[-1, 1]$  et sa transformée de Fourier



Si  $(\mathcal{K}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{K}})$  est le sous-espace hilbertien de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  relatif à  $K$ , nous savons que :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathcal{K}, \langle z_1 | z_2 \rangle_{\mathcal{K}} = \langle (u_{\mathcal{F}})^{-1} z_1 | (u_{\mathcal{F}})^{-1} z_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \langle z_1 - T_{\omega, \delta} z_1 | z_2 - T_{\omega, \delta} z_2 \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Puisque,

$$K(s, 0) = (1 - \omega^{-\delta})^{-1} \cdot (u_{\mathcal{F}} \cos)(s) = (1 - \omega^{-\delta})^{-1} \cdot \phi(s)$$

où  $\phi$  est la fonction de Weierstrass définie précédemment, il est naturel de dire que  $K$ , dont la restriction à la droite  $t = 0$  est de type fractal, est un noyau hilbertien de type fractal et que  $(\mathcal{K}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{K}})$  est un espace de Hilbert de type fractal.

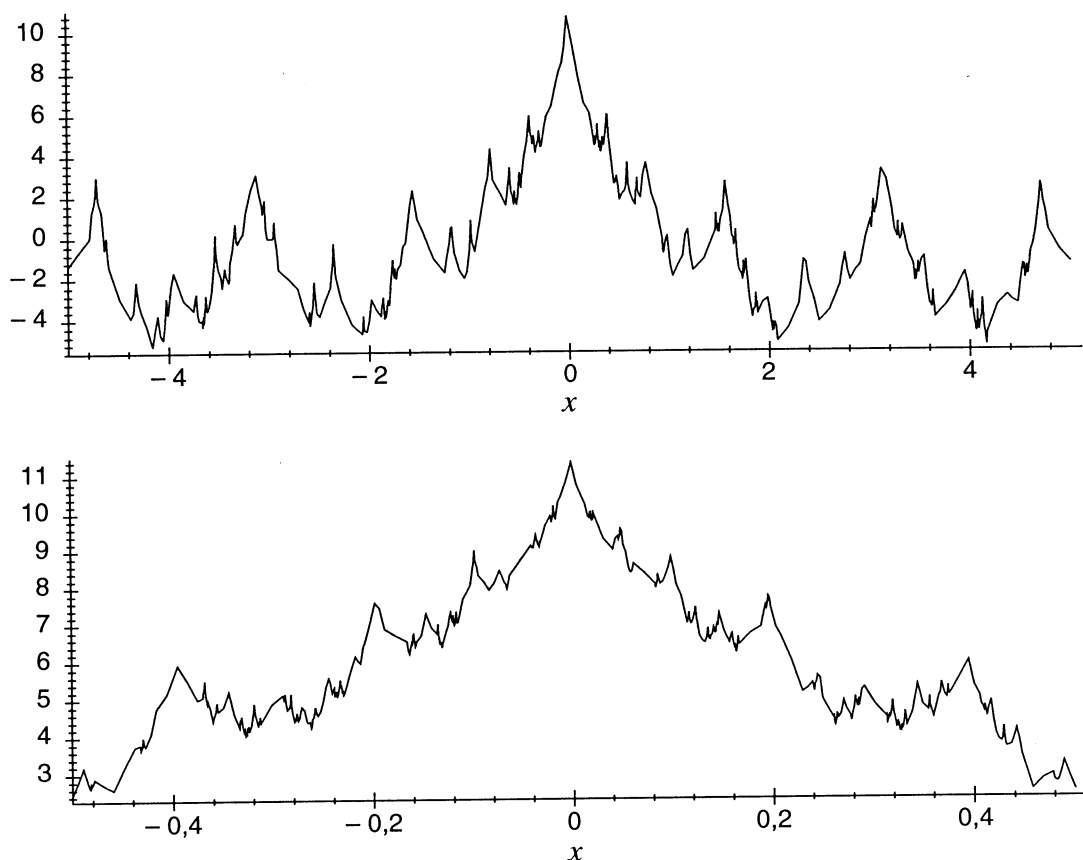


Fig 15 – Noyau fractal (Weierstrass). Échelles différentes

**Définition 6.2** – Nous dirons que  $(\mathcal{K}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{K}})$  est un espace hilbertien de type fractal si son noyau hilbertien  $K$  est l'image par un processus (linéaire) de type fractal d'un noyau hilbertien  $H$  régulier.

Dans la suite, nous ne considérerons que des processus *linéaires de type fractal*.

**Exemple 4** – Considérons la fonction  $\psi$  (fonction non dérivable de Riemann) telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^{-2} \cdot \sin(n^2 t)$$

(on montre que  $\psi$  est une fonction de type fractal [12]).

Pour toute fonction  $x \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n x = n^{-2} x(n^2 \bullet)$$

Deslauriers et Dubuc ont établi dans [4] que  $u_{\mathcal{F}}$  est une application linéaire de type fractal.

Désignons à présent par  $\Phi_0$ , la fonction de  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  telle que :

$$\Phi_0(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$$

et construisons les fonctions

$$\Phi_1 = v_1 \Phi_0, \quad \Phi_2 = v_2 \Phi_1, \quad \dots, \quad \Phi_{p+1} = v_{p+1} \Phi_p, \quad \dots$$

Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , posons :

$$\forall f \in C^0(\mathbb{C}), \quad \langle f, \Phi_p \rangle = \sum_{s \in D_p} f(s) \cdot \overline{\Phi_p(s)}.$$

Alors la fonction  $\Phi_p$  peut être identifiée à une mesure positive bornée sur  $\mathbb{C}$ .

On peut vérifier [4], que pour des choix convenables de  $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ , la suite  $(\Phi_p)_{p \in \mathbb{N}}$  converge vers une mesure positive bornée de type fractal sur  $\mathbb{C}$ .

## 1.2 ESPACES DE HILBERT ET NOYAUX HILBERTIENS DE TYPE FRACTAL

*Exemple 3* – Prenons les mêmes notations et faisons les mêmes hypothèses que dans l'exemple 1 précédent.

Soit  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  l'espace des fonctions indéfiniment dérivables, à support compact, muni de sa topologie localement convexe classique et  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  son dual topologique.

Désignons par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le crochet de dualité entre  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  (notons que  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ).

On a, pour tout  $x \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad (u_{\mathcal{F}}x)(t) &= \langle u_{\mathcal{F}}x, \delta_t \rangle = \langle x, {}^t u_{\mathcal{F}} \delta_t \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega^{-n\delta} x(\omega^n t) = \langle x, \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega^{-n\delta} \delta_{\omega^n t} \rangle \end{aligned}$$

et ainsi

$${}^t u_{\mathcal{F}} \delta_t = \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega^{-n\delta} \delta_{\omega^n t}.$$

Posons, à présent :

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad H(s, t) = \cos(s - t).$$

On vérifie facilement que  $H$  est un noyau hilbertien réel.

Soit

$$K = u_{\mathcal{F}} H {}^t u_{\mathcal{F}}.$$

Alors,

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad K(s, t) = \sum_{m, n \in \mathbb{N}} \omega^{-(m+n)\delta} H(\omega^m s, \omega^n t).$$

*Exemple 2* – La fonction “chapeau”

Soient  $\mu \in \mathbb{R}_+^*$  et  $g(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\mu} & \text{si } -\mu \leq t \leq \mu \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

Alors,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\sin(\pi\mu\xi)}{\pi\xi} \right]^2.$$

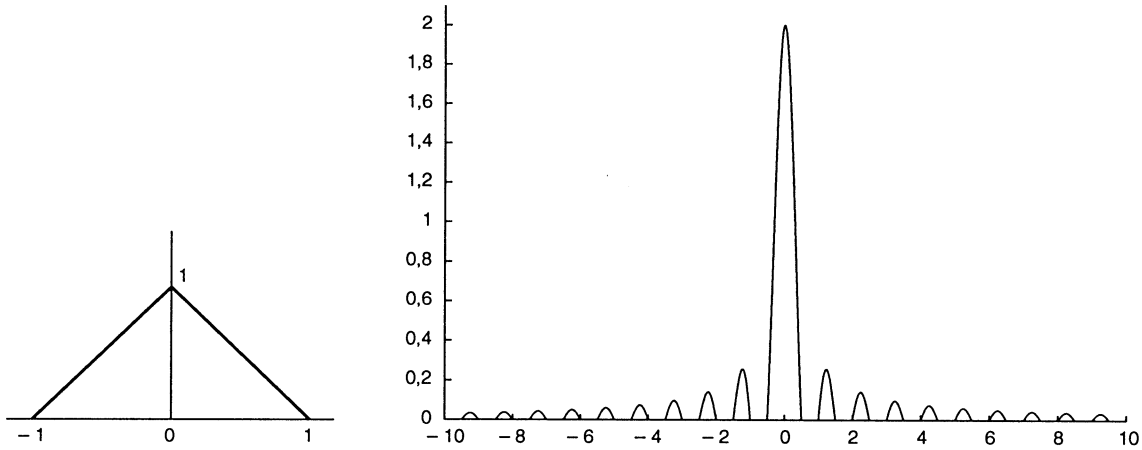


Fig 09 – La fonction “chapeau” et sa transformée de Fourier ( $\mu = 1$ )

*Exemple 3* – Fenêtre de Gauss

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \lambda e^{-\mu t^2}$ .

Alors,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{g}(\xi) = \lambda \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} e^{-\frac{\pi^2}{\mu} \xi^2}.$$

*Cas particulier* – La fenêtre de Gabor  $\lambda = \pi^{-4}$  où  $\mu = \frac{1}{2}$ .

On remarquera que, d’après le théorème de Bochner, dans les trois exemples ci-dessus  $\widehat{g}$  est une fonction de type positif à laquelle on peut donc associer un espace de Hilbert.

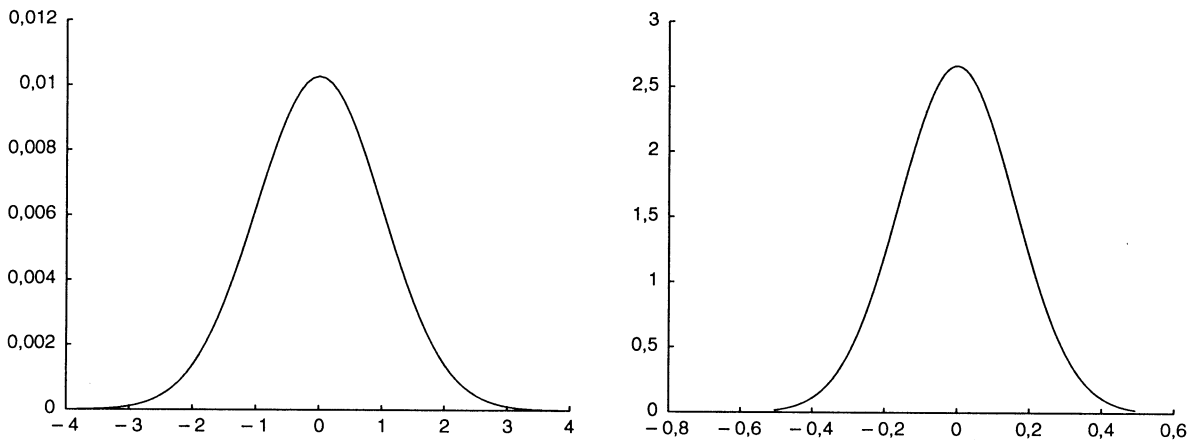


Fig 10 – La fenêtre de Gabor et sa transformée de Fourier

**Proposition 4.8**

Soit :  $m \in \mathbb{N}^*$  ,  $h \in \mathbb{R}_+^*$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , désignons par  $\widehat{K}_{m,h}(\bullet, t)$  la transformée de Fourier de  $K_{m,h}(\bullet, t)$  telle que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad , \quad \left( \widehat{K}_{m,h}(\bullet, t) \right) (\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi s} K_{m,h}(s, t) ds \quad , \quad (i^2 = -1).$$

Alors,

$$(i) \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad , \quad \left( \widehat{K}_{m,h}(\bullet, t) \right) (\xi) = e^{-2i\pi\xi t} \left( \text{sinc}(\pi\xi h) \right)^{2m} \quad \left( \text{sinc}(\rho) = \frac{\sin \rho}{\rho} \right)$$

$$K_{m,h}(\bullet, t) \star K_{p,h}(\bullet, s) = \int_{\mathbb{R}} K_{m,h}(\bullet - \rho, t) \cdot K_{p,h}(\rho, s) d\rho = K_{m+p,h}(\bullet, t + s).$$

$$(ii) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} K_{m,h}(jh, t) = h^{-1} \quad \text{et} \quad K_{m,h}(\bullet, t) \leq h^{-1}.$$

**Preuve**

$$(i) \quad \text{Posons : } \forall s, \xi \in \mathbb{R} \quad , \quad \phi(s, \xi) = (-2i\pi\xi)^{-2m} e^{-2i\pi\xi s}.$$

Ainsi,  $(\phi^{(2m)}(\bullet, \xi))(s) = e^{-2i\pi\xi s}$ . Du théorème précédent, on déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad \left( \widehat{K}_{m,h}(\bullet, t) \right) (\xi) = \left( D_h^m D_{-h}^m \phi(\bullet, \xi) \right) (t) = (-2i\pi\xi)^{-2m} D_{h,t}^m D_{-h,t}^m (e^{-2i\pi\xi t})$$

$$\begin{aligned} \text{or, } D_{h,t} D_{-h,t} e^{-2i\pi\xi t} &= h^{-2} \left[ e^{-2i\pi\xi(t+h)} - 2e^{-2i\pi\xi t} + e^{-2i\pi\xi(t-h)} \right] \\ &= h^{-2} e^{-2i\pi\xi t} (e^{-2i\pi\xi h} + e^{2i\pi\xi h} - 2) \\ &= 2h^{-2} e^{-2i\pi\xi t} (\cos(2\pi\xi h) - 1) = -(2h^{-1} \sin(\pi\xi h))^2 e^{-2i\pi\xi t}. \end{aligned}$$

Par récurrence, on montre que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad D_{h,t}^m D_{-h,t}^m e^{-2i\pi\xi t} = e^{-2i\pi\xi t} (-1)^m (2h^{-1} \sin(\pi\xi h))^{2m}.$$

Le premier résultat annoncé s'en déduit facilement.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \left( K_{m,h}(\bullet, t) \star K_{p,h}(\bullet, s) \right) \widehat{\quad} (\xi) &= \widehat{K}_{m,h}(\bullet, t) (\xi) \cdot \widehat{K}_{p,h}(\bullet, s) (\xi) \\ &= e^{-2i\pi\xi t} (\text{sinc}(\pi\xi h))^{2m} \cdot e^{-2i\pi\xi s} (\text{sinc}(\pi\xi h))^{2p} \\ &= e^{-2i\pi\xi(t+s)} (\text{sinc}(\pi\xi h))^{2(m+p)} = \left( \widehat{K}_{m+p,h}(\bullet, t+s) \right) (\xi). \end{aligned}$$

(ii) De plus,

$$\forall s, t \in \mathbb{R} \quad , \quad K_{1,h}(s, t) = D_{h,1} D_{h,2} (-(s-t)_+) = h^{-2} [(s+h-t)_+ - 2(s-t)_+ + (s-t-h)_+].$$

Il en résulte immédiatement que :  $\forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} K_{1,h}(jh, t) = h^{-1}$  et puisque

$$K_{1,h}(\bullet, t) \geq 0 \quad , \quad \text{on déduit que } K_{1,h}(\bullet, t) \leq h^{-1}.$$

Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  ,  $m \geq 2$  .