

DESCRIPTION DE LA SYMÉTRIE

**DES GROUPES DE SYMÉTRIE
AUX STRUCTURES FRACTALES**

JEAN SIVARDIÈRE



17 avenue du Hoggar
Parc d'Activité de Courtabœuf - BP 112
91944 Les Ulis Cedex A - France

Grenoble Sciences

Grenoble Sciences poursuit un triple objectif :

- réaliser des ouvrages correspondant à un projet clairement défini, sans contrainte de mode ou de programme,
- garantir les qualités scientifique et pédagogique des ouvrages retenus,
- proposer des ouvrages à un prix accessible au public le plus large possible.

Chaque projet est sélectionné au niveau de Grenoble Sciences avec le concours de referees anonymes. Puis les auteurs travaillent pendant une année (en moyenne) avec les membres d'un comité de lecture interactif, dont les noms apparaissent au début de l'ouvrage. Celui-ci est ensuite publié chez l'éditeur le plus adapté.

(Contact : Tél. : (33)4 76 51 46 95 - E-mail : Grenoble.Sciences@ujf-grenoble.fr)

Deux collections existent chez EDP Sciences :

- la ***Collection Grenoble Sciences***, connue pour son originalité de projets et sa qualité
- ***Grenoble Sciences - Rencontres Scientifiques***, collection présentant des thèmes de recherche d'actualité, traités par des scientifiques de premier plan issus de disciplines différentes.

Directeur scientifique de Grenoble Sciences

Jean BORNAREL, Professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble

Comité de lecture pour "Description de la symétrie"

- ◆ **Olivier ISNARD**, Professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble
- ◆ **Christian JANOT**, Professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble
- ◆ **Jean-Bernard ROBERT**, Professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble
- ◆ **Michel SCHLENKER**, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble

Grenoble Sciences reçoit le soutien
du **Ministère de la Jeunesse, de l'Éducation nationale et de la Recherche**,
de la **Région Rhône-Alpes**, du **Conseil général de l'Isère**
et de la **Ville de Grenoble**.

Illustration de couverture : Alice GIRAUD d'après des éléments provenant de :

- ◆ *membranes d'alumine après ouverture des pores (Laurent Cognon, laboratoire de cristallographie, CNRS, Grenoble)*
- ◆ *cristal de neige (Paul Duval, laboratoire de glaciologie et géophysique de l'environnement, Grenoble)*
- ◆ *oursins (Axel Arnoux, UMR SNRS 6019, Université de Provence, Marseille)*
- ◆ *capsides de virus (James Conway, Institut de biologie structurale, Grenoble)*

ISBN 2-86883-721-2

© EDP Sciences, 2004

EXTRAITS

- En étudiant la fusion interne de la glace, Tyndall a observé l'apparition de bulles de vapeur d'eau de symétrie hexagonale, ressemblant à des flocons de neige ou à des fleurs à pétales : des figures de Tyndall ayant une symétrie d'ordre 12 ont été découvertes récemment ¹⁰.
- Les amas ou "radeaux" de bulles de même rayon observables à la surface d'une eau savonneuse présentent des arrangements symétriques (fig.3) ¹¹. La paroi commune à deux bulles est plane et perpendiculaire à la surface de l'eau ; ces parois font entre elles des angles de 120° (règle de Plateau). Partant d'un amas à sept bulles, on peut lui ajouter 14, puis 21, puis 28, ... bulles périphériques et obtenir un gros amas de symétrie hexagonale. Si on ajoute (ou si on enlève) à un tel amas un secteur angulaire de bulles d'angle au centre 60° , on crée une "désinclinaison" et on obtient un amas ayant une symétrie d'ordre 7 (ou 5) ¹².

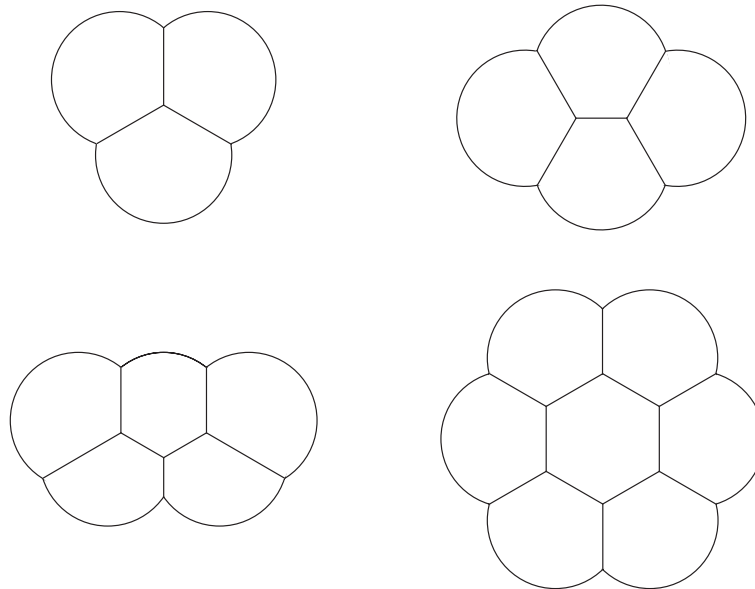


Fig. 3 - Amas symétriques de bulles

2.2. LES SYMÉTRIES MULTIAXIALES

Certains systèmes possèdent plusieurs axes de rotation d'ordres supérieurs à 2 et passant par un même point : ils ne possèdent pas de direction principale et leur

10. J. WALKER, "Expériences d'amateur", Pour la Science 107, 102 (septembre 1986).

11. J. WALKER, "Amateur scientist", Scientific American 238, 123 (avril 1978).

12. W.F. HARRIS, "Les désinclinaisons", Pour la Science 4, 11 (février 1978).

représente deux pliages de Wulff invariants dans des opérations inverses autres que le miroir. Le pliage a est centrosymétrique ; le pliage b est obtenu à partir d'un carré dans lequel on a inscrit un carré plus petit et décalé angulairement, en relevant les triangles 1 et 3, et en abaissant les triangles 2 et 4.

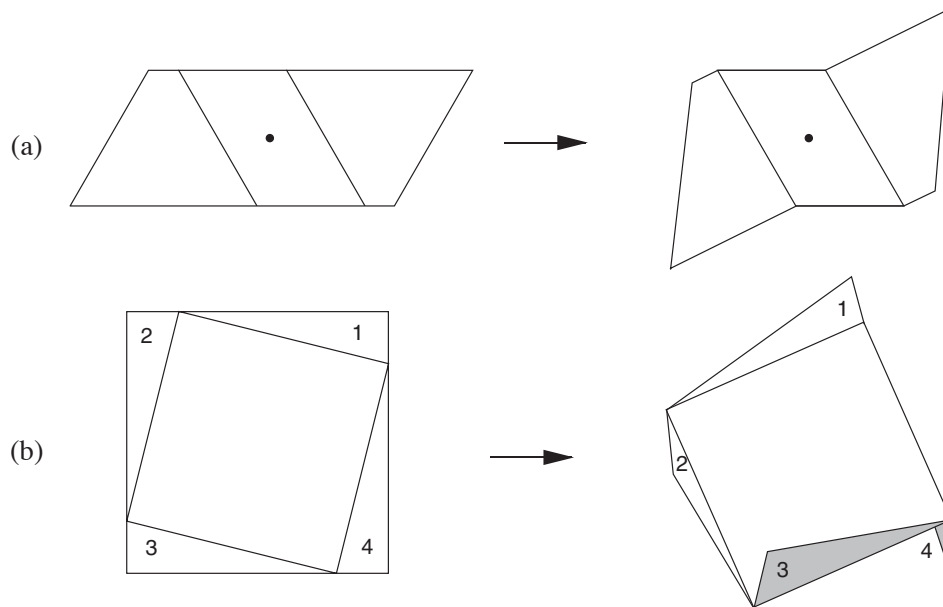
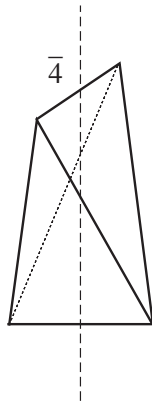


Fig. 7 - Pliages de Wulff :

(a) pliage centrosymétrique ; (b) pliage possédant un axe quaternaire inverse

Le sphénoèdre ou tétraèdre tétragonal¹⁹ possède lui aussi un axe $\bar{4}$ unique (fig.8).



**Fig. 8 - Sphénoèdre,
ou tétraèdre tétragonal**

Il est obtenu en étirant suivant un de ses axes quaternaires un tétraèdre régulier, qui perd ainsi ses axes ternaires : ses quatre faces sont des triangles isocèles égaux, deux

19. Du grec sphen, le coin.

Un tel groupe peut contenir une, plusieurs ou une infinité d'opérations ponctuelles : celles qui ont un même point fixe forment un sous-groupe.

9. ROTATION D'ANGLE 2π ET OPÉRATION IDENTITÉ

Dans ce qui précède, nous avons admis implicitement qu'une rotation d'angle 2π est assimilable à la transformation identité, en accord avec l'expérience commune. Il faut cependant regarder les choses de plus près^{5,6,7}, comme le suggèrent les expériences suivantes.

- Le plateau d'un tourne-disques tourne en restant relié au mur du laboratoire par un ruban : le système ne retourne à l'état initial qu'après une rotation de 4π . En effet la rotation du plateau dans l'espace n'est pas identique à sa rotation par rapport au ruban : une rotation de 2π induit une torsion du système plateau + ruban.
- Tenant un plateau horizontal sur la paume de la main, un garçon de café cherche à le faire tourner autour de son axe vertical sans bouger les pieds. Après une rotation de 360° , le plateau a retrouvé son orientation initiale, mais le bras du garçon de café est tordu : une nouvelle rotation de 360° est nécessaire pour que l'ensemble du verre et du bras se retrouvent dans l'état initial.
- Dans l'expérience de Dirac^{8,9,10,11}, deux triangles équilatéraux sont reliés par trois cordes de longueurs égales, celui du haut est fixé au plafond du laboratoire, celui du bas peut tourner autour d'un axe vertical (fig.4a). On peut vérifier expérimentalement qu'après une rotation de 2π , il est impossible de démêler les cordes en translatant le triangle inférieur sans le faire tourner (fig.4b), et que l'opération devient possible après une rotation de 4π (fig.4c). Pour que la non-invariance dans une rotation de 2π se manifeste, il faut que le solide *non isolé* qui subit la rotation soit impénétrable.

-
5. C.L. STONG, "The amateur scientist", Scientific American 233, 120 (décembre 1975).
 6. H. BERNSTEIN et A. PHILLIPS, "Les espaces fibrés et la théorie quantique", Pour la Science 47, 48 (septembre 1981).
 7. W. GOUGH, "On the phase change of a spinor due to a rotation through 2π ", Eur. J. Phys. 13, 167 (1992).
 8. A. COMTET et coll., "Vers de nouvelles statistiques quantiques", Images de la Physique, CNRS (1992).
 9. L.C. BIEDENHARN et J.D. LOUCK, *Angular momentum in quantum mechanics*, Encyclopedia of Mathematics volume 8, Addison-Wesley, Reading (1981).
 10. C.W. MISNER, K.S. THORNE et J.A. WHEELER, *Gravitation*, Freeman, San Francisco (1973).
 11. S.L. ALTMANN, *Rotations, quaternions and double groups*, Clarendon, Oxford (1986).

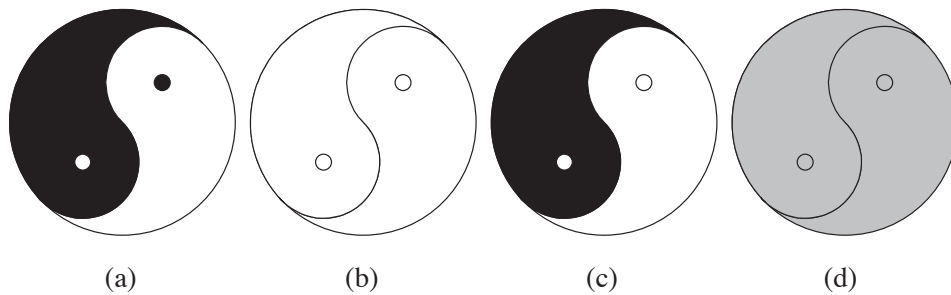


Fig. 1 - Symétrie du yin-yang

Si on s'en tient à ces considérations, on perd une information intéressante : le yin-yang noir et blanc de la figure 1a est "presque" invariant dans la rotation binaire, c'est-à-dire invariant à la couleur près, alors que celui de la figure 1c ne l'est pas. D'où l'idée d'introduire une nouvelle opération de symétrie, notée $1'$ et appelée *antisymétrie*, qui n'agit pas sur les paramètres géométriques mais seulement sur les couleurs, permute les deux couleurs noir et blanc, et peut se combiner avec toute opération géométrique. Alors on peut dire que le yin-yang noir et blanc de la figure 1a est invariant dans l'opération d'*antirotation* notée $2'$, rotation binaire suivie de l'opération $1'$. On est amené également à introduire la couleur grise et à considérer que l'opération $1'$ laisse un objet gris invariant. On voit sur cet exemple que la symétrie attribuée à un objet dépend de manière cruciale des qualités de l'objet que l'on décide de prendre en compte.

Une aiguille aimantée (fig.2a), un radiomètre de Crookes (fig.2b), les damiers de la figure 3b et c sont invariants dans des antirotations. Une frise colorée peut être invariante dans une antitranslation (fig.4a et 4c).

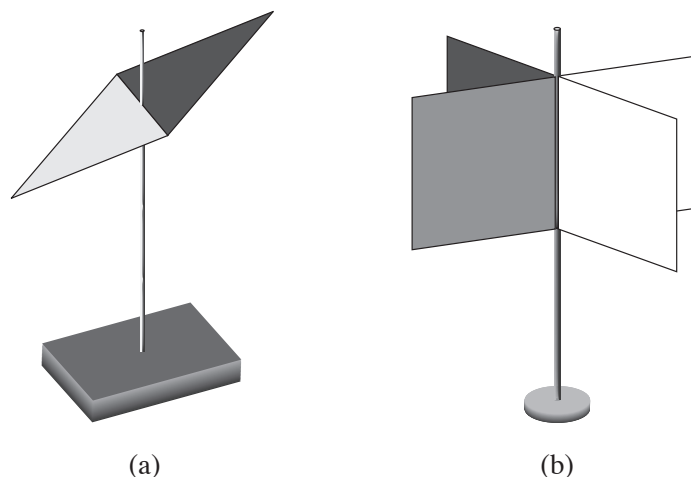


Fig. 2 - (a) Aiguille aimantée ; (b) Radiomètre de Crookes

"surface romaine" de Steiner (1844), elle aussi unilatère, a la symétrie du tétraèdre régulier comme le montre son équation cartésienne qui est de degré 4 :

$$x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 + x y z = 0$$

La "supersphère" ou cube arrondi aux angles, d'équation $x^4 + y^4 + z^4 = 1$, a la symétrie $m\bar{3}m$ du cube. Le tore, la pseudo-sphère (engendrée par la rotation d'une tractrice autour de son asymptote), le caténoïde (dont la méridienne est une chaînette) et le cône ont une symétrie continue de révolution ; un cylindre une symétrie continue de translation ; l'hélicoïde droit une symétrie hélicoïdale continue.

8.3. SURFACES PÉRIODIQUES

Les surfaces $z = \cos x \cdot \cos y$ et $z = \cos x + \cos y$ sont doublement périodiques, leur symétrie ponctuelle est $4/mmm$ et leur symétrie d'espace $P 4/mmm$. Les surfaces équipotentielles électrostatiques dans un cristal sont triplement périodiques. Par exemple dans le cristal cubique CsCl, les ions de charge positive sont aux sommets d'un réseau cubique simple et les ions de charge négative aux centres des cubes. En première approximation, la surface de potentiel nul (fig.12) est la surface de Mackay ayant pour équation : $\cos x + \cos y + \cos z = 0$, sa symétrie ponctuelle est $m\bar{3}m$ et sa symétrie d'espace $P m\bar{3}m$.

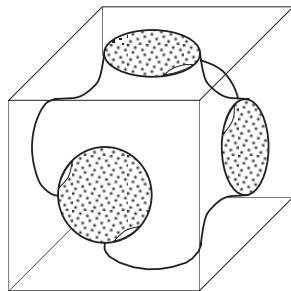


Fig. 12 - Maille élémentaire de la surface de Mackay

La surface de Fermi des métaux monovalents de structure cubique simple a une topologie analogue à celle de la surface de Mackay¹². Mais les surfaces périodiques les plus intéressantes sont les *surfaces minimales*, de courbure moyenne nulle en tout point¹³ (comme celle du caténoïde et de l'hélicoïde), qui ont été étudiées par

12. M.Y. AZBEL et coll., "Conduction electrons in metals", Scientific American 228, 88 (janvier 1973).

13. A.L. MACKAY, "Periodic minimal surfaces", Physica B+C 131, 300 (1985) et Nature 314, 604 (1985).

J.P. BOURGUIGNON, H.B. LAWSON et C. MARGERIN, "Les surfaces minimales", Pour la Science 99, 90 (janvier 1986).

J. CHARVOLIN et J.F. SADO, "Les cristaux de films", La Recherche 241, 306 (mars 1992).

gravité, ou un point quelconque, des faces du polyèdre initial. On a donc $S' = F$. Au sommet de coordinence z_i correspond une face à z_i côtés et par suite $F' = S$, d'où $A' = A$. Le dual d'un tétraèdre est un tétraèdre, celui d'un hexaèdre est un octaèdre. Un polyèdre régulier et son dual, étant définis l'un à partir de l'autre, ont évidemment même symétrie.

3. POLYÈDRES RÉGULIERS

Un polyèdre régulier est un polyèdre isoèdre dont toutes les faces sont des polygones réguliers identiques. Alors qu'il existe une infinité de polygones réguliers, il n'existe que cinq polyèdres réguliers convexes appelés aussi *solides de Platon ou d'Euclide*. Ils étaient connus des géomètres grecs : le dodécaèdre fut découvert le dernier, dit-on, par Hippiasus en - 470 (ou par Theaitetos, un élève de Platon), peut-être parce que ses faces ne sont ni des triangles, ni des carrés mais des pentagones. En réalité, des dés dodécaédriques étaient utilisés par les Etrusques bien avant.

3.1. ENUMÉRATION DES POLYÈDRES RÉGULIERS CONVEXES

Les 5 polyèdres réguliers convexes peuvent être énumérés de manière très simple en utilisant le théorème d'Euler. Dans un polyèdre régulier, la valence ou nombre d'arêtes partant d'un même sommet est constante, de même que le nombre n des côtés de chaque face. Une même arête relie deux sommets voisins et elle est commune à deux faces adjacentes. Par suite : $S z = F n = 2 A$, d'où en utilisant la formule d'Euler :

$$1/A = 1/z + 1/n - 1/2$$

D'autre part, z et n sont au moins égaux à 3. A étant nécessairement positif et fini, on a : $1/z + 1/n > 1/2$, z et n sont donc strictement inférieurs à 6. Des résultats précédents, on déduit les seules valeurs possibles de z , n , A , S et F . On obtient bien les valeurs correspondant aux 5 polyèdres réguliers connus, et on démontre ainsi que ces polyèdres sont les seuls qui existent (en particulier, il n'existe pas de pentaèdre régulier).

Polyèdre	z	n	A	S	F
tétraèdre	3	3	6	4	4
octaèdre	4	3	12	6	8
icosaèdre	5	3	30	12	20
cube	3	4	12	8	6
dodécaèdre	3	5	30	20	12

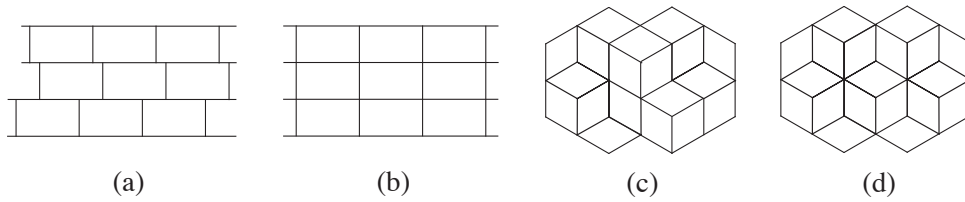


Fig. 3 - Pavages monoèdres désordonnés et périodisables :
 (a) désordre positionnel ; (c) désordre orientationnel ; (b), (d) pavages ordonnés correspondants

1.2. PAVAGES RÉGULIERS

Cherchons à paver le plan à l'aide de polygones réguliers de même taille : ce problème a été étudié par Kepler et sa solution est bien connue des carreleurs. Il est aisé de vérifier expérimentalement que l'opération n'est possible qu'avec des triangles équilatéraux (réseaux de bulles de Bragg), des carrés, et des hexagones (nids d'abeilles) : dans ces trois cas, on obtient un pavage monoèdre ordonné, doublement périodique, isogone, dans lequel tous les nœuds sont équivalents. Ces polygones peuvent avoir des tailles quelconques ; dans le pavage triangulaire, ils présentent deux orientations. Ce résultat s'interprète aisément. Un pavage par des polygones réguliers à n côtés est possible seulement si l'angle entre deux côtés adjacents, égal à $180^\circ (1 - 2/n)$, est un sous-multiple de 360° ; si z est le nombre de polygones accolés, la condition s'écrit : $(n - 2)(z - 2) = 4$. C'est bien la condition que l'on obtient à partir de la relation $S(n, z)$ qui donne le nombre de sommets d'un polyèdre régulier quand S est infini (voir chapitre 15).

La figure 4, due à Kepler (1619), montre qu'un pavage du plan par des pentagones et octogones réguliers jointifs laisse subsister des trous (on dit qu'il y a *frustration*), et qu'un pavage par des heptagones implique des recouvrements. Contrairement à l'assemblage pentagonal non jointif, l'assemblage octogonal non jointif est périodique. Un pavage par des polygones réguliers étoilés est impossible.

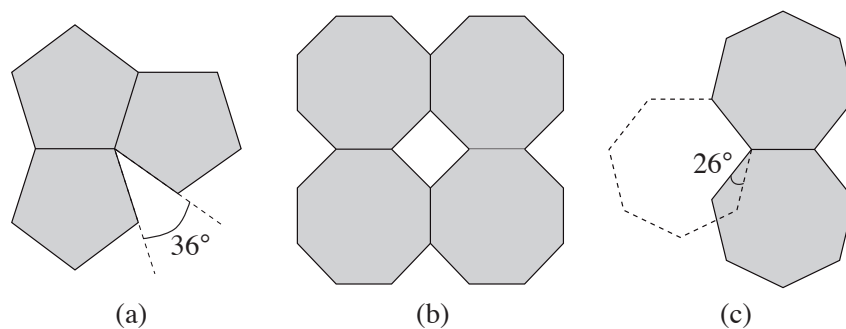


Fig. 4 - (a) Assemblage non jointif de pentagones réguliers ; (b) assemblage périodique non jointif d'octogones réguliers ; (c) assemblage d'heptagones réguliers avec recouvrement

1.1. LES FULLERÈNES SIMPLES

Il s'agit d'une sorte de "graphite sphérique", suivant la suggestion de Kroto, consistant en des assemblages sphéroïdaux de m hexagones comportant, en accord avec le théorème d'Euler, 12 défauts pentagonaux³, d'où la formule générale C_{20+2m} (rappelons en effet qu'il n'est pas possible de paver une sphère avec des hexagones réguliers). D'où son nom, qui évoque l'architecte américain Buckminster Fuller, constructeur de dômes géodésiques formé de pentagones et d'hexagones tels que le pavillon des USA à l'exposition de Montréal en 1967. On pense que le silicium forme des agrégats analogues. Le fullerène le plus simple est le C_{20} , les atomes occupent les sommets d'un dodécaèdre régulier. Si le nombre d'atomes de carbone est inférieur à 20, la molécule a la forme d'un anneau qui s'ouvre à haute température.

Le C_{60} ou footballène est le fullerène le plus stable et le plus "rond". Les 60 atomes sont, d'après les expériences de résonance magnétique nucléaire, chimiquement équivalents ; ils sont répartis à la surface d'une sphère creuse de diamètre 7.1Å environ, et forment un icosaèdre régulier tronqué dont les faces, comme celles d'un ballon de football, sont 12 pentagones et 20 hexagones, chaque pentagone étant entouré de six hexagones (fig.1)⁴. Chaque atome est commun à un pentagone et deux hexagones. Sous pression, le C_{60} solide ou fullerite, de structure cubique à faces centrées, se transforme en diamant⁵.

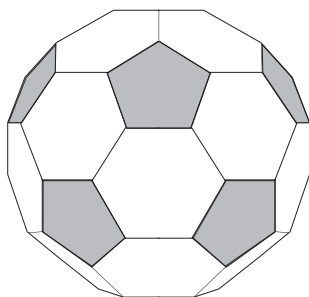


Fig.1 - Structure de la molécule C_{60}

Les facettes pentagonales de la molécule sont grisées

Le C_{60} est le plus petit fullerène dans lequel deux pentagones ne sont pas accolés, les suivants étant les C_{70} , C_{76} , C_{80} , C_{84} , C_{90} et C_{94} ⁶. Le C_{70} n'est pas sphérique, mais allongé comme un ballon de rugby, il comporte 12 pentagones et 25 hexagones

-
3. Voir W.F. HARRIS, "Les désinclinaisons", Pour la Science 4, 11 (février 1978).
 4. Le livre "De divina proportione" de Fra Lucia Pacioli contient une illustration de Léonard de Vinci qui représente une cage en forme d'icosaèdre régulier tronqué, correspondant précisément à la structure du C_{60} .
 5. M. NUNEZ-REGUEIRO, "Les fullerènes, des molécules fabuleuses", La Recherche 244, 762 (juin 1992).
 6. W.O. BOO, "An introduction to fullerene structures", J. Chem. Ed. 69, 605 (1992).

triangulaire. Les radeaux ont même orientation et laissent entre eux des trous : cette structure cristalline imparfaite, dite hexatique, est analogue à celle d'un cristal partiellement fondu.

6.4. AUTRES MILIEUX BIPÉRIODIQUES

De nombreux systèmes bidimensionnels ont une symétrie hexagonale, qu'il s'agisse de nids d'abeilles ou de réseaux triangulaires. Dans certains cristaux comme le zinc, des lignes parallèles de dislocations s'organisent en un réseau hexagonal, observable par microscopie électronique, dont le pas est de l'ordre du micromètre²³. Il en est de même des domaines magnétiques cylindriques appelés bulles²⁴. Certains défauts dans les cholestériques et les smectiques s'organisent suivant un réseau carré^{25, 26}.

Suivant une prédiction d'Abrikosov (1957), les lignes de tourbillons magnétiques (lignes de flux) dans un supraconducteur de deuxième espèce forment un réseau triangulaire^{27, 28, 29} : ce réseau d'Abrikosov a pu être détecté par diffraction des neutrons et microscopie électronique.

Il est vraisemblable que les lignes de tourbillons (lignes de vortex) dans l'hélium 4 suprafluide forment aussi un réseau triangulaire^{30, 31, 32} : ces tourbillons, dont le nombre augmente avec la vitesse de rotation du réservoir, sont visualisés à l'aide de charges électriques qu'ils piègent dans leur cœur.

-
23. A. GUINIER, "Ordre et désordre dans la matière", La Recherche 17, 941 (novembre 1971).
24. P.J. GRUNDY, "Bubble domains under the electron microscope", Contemp. Phys. 18, 47 (1977).
25. Y. BOULIGAND, "Textures des états mésomorphes : champs polygonaux dans les cholestériques", J. Physique 33, 715 (1972). C.S. ROSENBLATT et coll., "The parabolic focal conic : a new smectic defect", J. Physique 38, 1105 (1977).
26. S.A. ASHER et P.S. PERSHAN, "Parabolic focal conics and polygonal textures in lipid liquid crystals", J. Physique 40, 161 (1979).
27. Voir A. LIBCHABER et G. TOULOUSE, "Le retour des solitons", La Recherche 73, 1027 (décembre 1976).
28. U. ESSMAN et H. TRAUBLE, "The direct observation of individual flux lines in type II superconductors", Physics Letters 24A, 526 (1967).
29. E. TSITRONE, "Supraconductivité : quand les vortex s'animent", La Recherche 25, 216 (février 1994).
30. C. DUPAS, "Premières photographies des tourbillons quantiques", La Recherche 51, 1088 (décembre 1974).
31. D. D'HUMIERES, "Des réseaux de tourbillons enfin photographiés dans l'hélium suprafluide", La Recherche 108, 198 (février 1980).
32. G. WILLIAMS, "Les tourbillons dans les superfluides", La Recherche 238, 1442 (décembre 1991).

considéré. Ces aires dépendent des propriétés intrinsèques du cristal mais aussi de ses conditions de formation.

A partir de cette observation, les minéralogistes constatèrent que les opérations de symétrie ponctuelle susceptibles de laisser un cristal invariant sont en nombre limité : il s'agit des rotations d'ordre 2, 3, 4 et 6 ; de l'inversion ; du miroir ; enfin des rotations-inversions d'ordre 3, 4 et 6. Hessel démontra que seules ces opérations sont compatibles avec la triple périodicité cristalline. En particulier, contrairement au cas des molécules, les rotations d'ordre 5 n'apparaissent jamais : si une forme cristalline possède un axe d'ordre 5 (c'est le cas des formes dodécaédriques et icosaédriques), ce n'est que de manière approchée.

En 1820, Mohs classa les formes extérieures en 7 systèmes caractéristiques. En 1839, Miller mit au point la méthode d'indexation des faces d'un cristal qui porte son nom, esquissée par Weiss et Mohs. Hessel, en 1830, énuméra les 32 groupes ponctuels, également appelés classes cristallines, qui décrivent les symétries d'orientation possibles des cristaux, et en particulier leurs formes extérieures. Mais ses travaux ne furent découverts qu'en 1891 par Sohncke, et Gadolin les retrouva indépendamment en 1869.

2. SYMÉTRIE MICROSCOPIQUE DES CRISTAUX

Cette symétrie, mise en évidence par les phénomènes de diffraction des rayonnements (rayons X, électrons, neutrons), est celle du cristal à l'échelle atomique : on l'appelle aussi *symétrie d'espace*, *symétrie spatiale* ou *symétrie de position*. Haüy énonça en 1781 la loi fondamentale dite des *troncatures rationnelles*. Puis, s'interrogeant sur le caractère plan des faces cristallines et sur la loi de Romé de l'Isle, et étudiant les formes extérieures des cristaux de calcite qu'il brisait en morceaux de plus en plus petits et semblables entre eux, il développa en 1801 l'hypothèse d'une triple périodicité des milieux cristallins déjà émise par Kepler dans son opuscule sur les cristaux de neige, puis de manière plus précise par Huygens pour expliquer la biréfringence des cristaux (Huygens empilait des molécules ellipsoïdales), par Hooke et par Bergman à partir des propriétés de clivage des cristaux (mica, gypse, ...). Selon Haüy, les cristaux sont donc formés de briques élémentaires, qu'il appelait "molécules intégrantes" et dont il distinguait 6 types, dont l'empilement régulier donne naissance à des plans suivant lesquels ils peuvent se cliver (Fedorov reprendra cette idée d'un pavage de l'espace par des paralléloèdres). Cette hypothèse était d'autant plus séduisante qu'elle permettait de rendre compte du nombre limité d'opérations ponctuelles laissant les cristaux invariants.