EXERCICES CORRIGÉS D'ANALYSE

AVEC RAPPELS DE COURS

TOME 1

RELATIONS – APPLICATIONS
SUITES
ETUDE LOCALE DES FONCTIONS

Daniel ALIBERT

Presses Universitaires de Grenoble – 1992

La Collection Grenoble Sciences

La Collection Grenoble Sciences fut créée à l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1 - avec un triple objectif :

– permettre d'offrir aux étudiants et usagers des ouvrages à des prix convenables,
– constituer une mémoire pour d'excellents documents qui restent souvent chez leurs auteurs,
– réaliser des ouvrages correspondant vraiment à un objectif clair, en contrepoint des ouvrages réalisés par rapport à tel ou tel programme plus ou moins officiel.

Les documents sont, pour la plupart, publiés dans le seul cadre de l'Université Joseph Fourier. Ceux qui sont destinés à un plus vaste public sont sélectionnés, critiqués par un comité de lecture et édités dans cette collection spécifique des Presses Universitaires de Grenoble.

Directeur de la Collection Grenoble Sciences

Jean BORNAREL, Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1

Comité de lecture de l'ouvrage de Daniel ALIBERT

J. ROBINET, Professeur à l'Université Paris 7

J.P. DEMAILLY, Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1

M LEGRAND, Maître de conférences à l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1

Déja parus :

L'ergomotricité. Corps, travail et santé, par M. Gendrier

Chimie. Le minimum vital, par J. Le Coarer

Enzymes, par J. Pelmont

Mathématiques pour les sciences de la nature et de la vie, par F. et J.P. Bertrandias

Endocrinologie. Fondements physiologiques, par S. Idelman

Minimum competence in scientific English, par J. Upjohn, S. Blattes et V. Jans

Analyse numérique et équations différentielles, par J.P. Demailly

A paraître :

Exercices corrigés d'Analyse – Tome 2, par D. Alibert

Introduction à la Mécanique statistique, par E. Belorizky et W. Gorecki

La symétrie en physique et en chimie, par J. Sivardière

EXTRAITS

QUESTIONS

Question A1

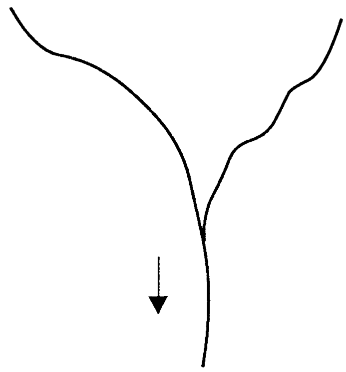
Sur $\mathbb{N}$ la partie suivante de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définit-elle une relation transitive, symétrique, réflexive : $\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3), (3,4), (4,3)\}$. Si elle n'est pas transitive, la compléter pour avoir une relation transitive.

Question A2

Soit R une relation sur un ensemble E . Si R n'est pas antisymétrique, est- elle symétrique ?

Question A3

Dans la figure ci-contre (fleuve), $a \leq b$ si b est en amont de a : est-ce un ordre total ?



Question A4

Soit A une partie d'un ensemble ordonné. Si $\max(A)$ et $\sup(A)$ existent, quel rapport y-a-t'il entre eux ?

Réponses proposées :

- $\max(A) = \sup(A)$
- $\max(A) \leq \sup(A)$
- si $\sup(A)$ appartient à A , alors $\max(A) = \sup(A)$
- si $\sup(A)$ n'appartient pas à A , alors $\max(A) < \sup(A)$.

Question A5

Est-il vrai que

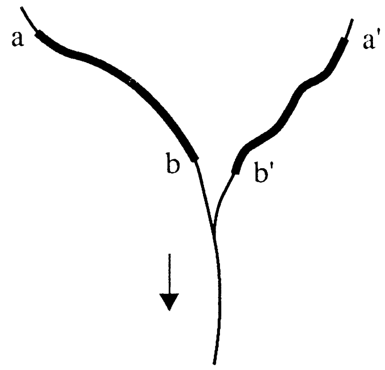
- si $\sup(A)$ existe et n'appartient pas à A , alors $\max(A)$ n'existe pas.
- si $\sup(A)$ n'existe pas, alors $\max(A)$ n'existe pas.

Question A6

Si A et B sont des parties d'un ensemble totalement ordonné, quelles relations y-a-t'il entre $\sup(A \cup B)$, $\sup(A \cap B)$, $\sup(A)$, $\sup(B)$ si ces éléments existent ? Même question pour les bornes inférieures.

Question A7

Conjecture : les sous-ensembles suivants sont des intervalles.



a. Réunion des parties en gras ci-contre (voir question A3) :

b. Partie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ordonné lexicographiquement :

$I = \{ (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) \}$

Question A8

Montrer qu'un élément x d'un ensemble totalement ordonné E a au plus un prédécesseur, et au plus un successeur et que s'ils existent, on a

$$\text{pred}(\text{succ}(x)) = \text{succ}(\text{pred}(x)) = x .$$

Question A9

Soit R une relation symétrique et transitive : montrons qu'elle est réflexive.
Soit x un élément de E et y tel que xRy . On a alors yRx , par la symétrie, d'où xRx par la transitivité.
Où est l'erreur ?

Question A10

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F.
Examiner les énoncés suivants :

a. pour toute partie A de F, on a $f(f^{-1}(A)) = A$.

b. pour toute partie B de E, on a $f^{-1}(f(B)) = B$.

Question A11

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, X et Y des parties de E, a-t'on

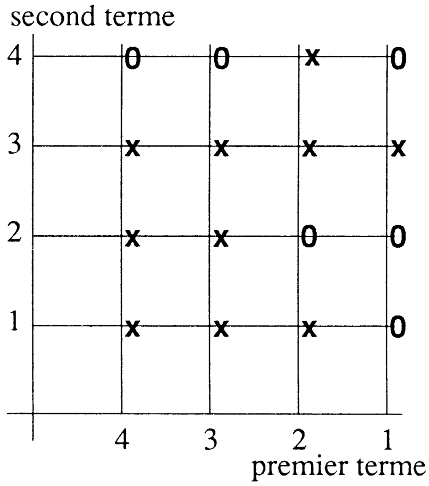
$$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y) \ ?$$

CORRIGÉS DES QUESTIONS

Question A1

Aucune des propriétés n'est vérifiée :
La relation n'est pas réflexive : on n'a pas $(4,4)$ dans son graphe.
Elle n'est pas symétrique, puisque $(2,3)$ est dans le graphe, mais pas $(3,2)$.
Enfin elle n'est pas transitive, puisque $(3,1)$ et $(1,2)$ sont dans le graphe mais pas $(3,2)$.

On peut faire un graphique : les (x) représentent les couples du graphe de la première relation , les (0) les couples qu'il faut ajouter pour obtenir une relation transitive. Remarquons que cette hypothèse est suffisamment forte pour aboutir à une relation où tout élément est en relation avec tous les éléments de l'ensemble. (relation triviale)



Question A2

Cette conjecture est fausse.
Antisymétrique signifie que "pour tous x et y de E, xRy et yRx entraînent x = y".
Si R n'est pas antisymétrique, il existe un contre-exemple à cet énoncé, soit : "il existe un couple (x,y) , avec $x \neq y$, xRy et yRx".
Par ailleurs, symétrique signifie "pour tous x et y de E , si xRy alors yRx".
Ces deux énoncés semblent donc a priori sans rapport.
On peut finir de se convaincre sur un contre-exemple : soit $E = \{1,2,3\}$ et R définie par $\{(1,2), (2,1), (1,3)\}$. Cette relation n'est ni symétrique puisque 1R3 mais pas 3R1 , ni antisymétrique, puisque 1R2 , 2R1 , mais pas 1R1 .
La conjecture est donc fausse.

Question A3

Cet ordre n'est pas total : des points situés sur des "affluents" différents en amont du confluent ne sont pas comparables.

Question A4

Soit $a = \max(A)$. Cet élément est un majorant de A , et un élément de A . Soit x un majorant quelconque de A , comme $a \in A$, on a $x \geq a$, donc a est le plus petit majorant, c'est-à-dire $\sup(A)$.

Question A5

Ces deux énoncés sont vrais, comme on le voit d'après la question précédente.

Question A6

Si A et B sont bornés, $A \cup B$ et $A \cap B$ également, et réciproquement si $A \cup B$ est borné, A , B , $A \cap B$ le sont aussi.

On a alors :
$$\sup(A\cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B)) ,$$
$$\sup(A\cup B) = \max(\sup(A), \sup(B)) ,$$
$$\inf(A\cap B) \geq \max(\inf(A), \inf(B)) ,$$
$$\inf(A\cup B) = \min(\inf(A), \inf(B)) .$$

Question A7

La réponse est affirmative dans le cas (a) et négative dans le cas (b), puisque (2,4) est compris entre (2,3) et (3,1) et n'appartient pas à I.

Question A8

Supposons que y et y' soient tous deux des prédécesseurs de x. Alors les intervalles $]y,x[$ et $]y',x[$ sont vides.
Mais E est totalement ordonné donc

$$y \leq y' \text{ ou } y' \leq y .$$

Dans le premier cas par exemple,

$$y \leq y' < x ,$$

donc

$$y' = y .$$

Il n'y a qu'un prédécesseur.
On procède de même pour les successeurs.
Le segment $]x,\mathrm{succ}(x)[$ est vide, donc

$$x = \mathrm{pred}\big(\mathrm{succ}(x)\big) .$$

Question A9

L'erreur est dans le fait qu'on suppose implicitement dans ce raisonnement qu'il existe un élément y de E tel que xRy, ce qui n'est pas forcément vrai.

Question A10

Ces deux énoncés sont faux en général, le premier est vrai si f est surjective, le second si f est injective.

Question A11

Non : il se peut, par exemple, que $X \cap Y$ soit vide, mais $f(X) \cap f(Y)$ non vide (penser à une projection sur une droite dans le plan).

PROBLÈMES

Problème D1

Soit $f : R \longrightarrow R$, dérivable telle que pour x positif, $f(x) \geq x$ et $f(0) = 0$.

a. Montrer que $f'(0) \geq 1$.

***b.** Montrer qu'il existe une suite (a_n) à termes positifs, tendant vers 0 telle que pour tout n, $f'(a_n) \geq 1$.*

***c.** Si on suppose de plus f deux fois dérivable en 0 et $f(x) \geq x$ pour tout x, que peut-on dire du signe de $f''(0)$? *

Problème D2

Soit $g : R^2 \longrightarrow R$, définie par $g(x,y) = y - \sqrt{2}\, y \cos(x)$.

a. Etudier et représenter le sous-ensemble du plan défini par $g(x,y) = 0$, puis $g(x,y) \geq 0$.

Rechercher les extremums de g.

Déterminer le gradient de g en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

b. Représenter sur la même figure le sous-ensemble d'équation $g(x,y) = 1$.

Quelle est la différentielle de g en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$?

Problème D3

On propose les 7 approximations suivantes d'une même fonction f au voisinage de 0 (dans toutes ces formules, $\varepsilon(x)$ désigne une fonction quelconque tendant vers 0 en 0).

Quelles sont les approximations compatibles ?

Dans un ensemble d'approximations compatibles, classer ces formules par ordre de précision croissante, en explicitant les informations données par chaque formule.

a. $f(x) = x + \varepsilon(x)$

b. $f(x) = x + x^2 + \varepsilon(x)$

c. $f(x) = 2x + x\,\varepsilon(x)$

d. $f(x) = x + x\,\varepsilon(x)$

e. $f(x) = x + x^2\,\varepsilon(x)$

f. $f(x) = 2x + 2x^2 + x\,\varepsilon(x)$

g. $f(x) = x + x^2 + x^2\,\varepsilon(x)$

Problème D4

a. On note f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{y - x + 1}{y - \ln |x|}$.

Etudier la continuité, la différentiabilité de f, ainsi que la possibilité de la prolonger hors de son domaine de définition, en une fonction continue.

b. Même question pour la fonction $f(x,y) = \quad x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.

Problème D5

On considère les fonctions suivantes :

$f : R^2 \longrightarrow R$, si $y \leq 0$, $f(x,y) = 0$,

si $y > 0$, $f(x,y) = y^2 \cos(x)$.

$g : R^2 \longrightarrow R^2$, $g(x,y) = \text{grad } f(x,y)$.

$c : R \longrightarrow R^2$, $c(t) = (t,3t)$.

$h = goc : R \longrightarrow R^2$.

a. Etudier la différentiabilité de f.

b. Etudier la continuité de h et de g et leur différentiabilité.

Problème D6

On considère la fonction définie par $f(x) = \text{Arctan}(x)$.

a. Montrer que f est dérivable à tout ordre.

b. Montrer que les dérivées de f sont de la forme $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$.

P_n étant un polynôme. Calculer P_1, P_2.

c. Déterminer le degré de P_n, sa parité, son terme de plus haut degré.

d. Démontrer la relation $(1 + x^2) f'''(x) + 4x f''(x) + 2f'(x) = 0$ et en déduire $f^{(n)}(0)$.

Problème D7

On considère la fonction définie par $f_\lambda(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda xy + x^2 y^2$, λ étant un paramètre réel et on note (S_λ) la surface associée.

a. Etudier (S_λ) au voisinage du point $(0,0,0)$.

b. Soit T_0 le plan tangent à (S_λ) en $(0,0,0)$. L'intersection $T_0 \cap (S_\lambda)$ est-elle réduite à $(0,0,0)$?

c. Etudier (S_λ) au voisinage des autres points où le plan tangent est horizontal.

CORRIGÉS DES PROBLÈMES

Problème D1

a. La dérivée $f'(0)$ est la limite de $m(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ lorsque x tend vers 0.

Comme pour $x > 0$, $m(x) \geq 1$, on a $f'(0) \geq 1$. (∇)

(∇) Si $f'(0) < 1$, soit $\varepsilon = \dfrac{1 - f'(0)}{2}$.

Il existe un réel α tel que pour x compris entre $-\alpha$ et α, on ait

$$f'(0) - \varepsilon < m(x) < f'(0) + \varepsilon = \frac{1 + f'(0)}{2} < 1 .$$

On aboutit donc à une contradiction, donc $f'(0) \geq 1$.

C'est un cas particulier du résultat selon lequel si pour $x > x_0$, $f(x) \geq a$, alors la limite de f en x_0 (si elle existe) est supérieure ou égale à a .

b. S'il existe un entier n tel que sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{n}\right[$, $f'(x)$ soit inférieur à 1 , alors d'après le théorème des accroissements finis, on a $f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) < \frac{1}{n}$, soit $f\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, ce qui est faux.

Donc pour tout n entier il existe un réel a_n dans l'intervalle $\left]0, \frac{1}{n}\right[$, tel que $f'(a_n) \geq 1$.

c. Si $f(x) \geq x$ pour tout x, alors $f'(0) = 1$, comme le suggère un essai graphique. (∇)
(∇) Pour montrer que $f'(0) = 1$, on peut procéder comme suit :
Ecrivons l'approximation différentielle de f en 0 :

$$f(x) = f(0) + x\, f'(0) + x\, \varepsilon(x) = x\,(f'(0) + \varepsilon(x))$$

donc si $f'(0) > 1$, pour x assez proche de 0 , $f'(0) + \varepsilon(x) > 1$ et pour x négatif on aurait $f(x) < x$.
Il en résulte que $f'(0) = 1$.
Ecrivons alors le développement de Taylor de f à l'ordre 2 en 0 :
$f(x) = x + \frac{x^2}{2} f''(0) + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x)$ tendant vers 0 avec x .

La condition $f(x) \geq x$ entraîne $\frac{x^2}{2} f''(0) + x^2 \varepsilon(x) \geq 0$, soit $\frac{1}{2} f''(0) + \varepsilon(x) \geq 0$.

Comme $\varepsilon(x)$ tend vers 0 avec x , il en résulte que $f''(0)$ est positif.

*Problème D*2

a. L'équation $g(x,y) = 0$ équivaut à $y = 0$, ou $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Le sous-ensemble du plan défini par ces équations est donc formé de droites : l'axe Ox , et les droites parallèles à Oy d'équations $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ (k entier).

La fonction g est continue, donc elle ne change de signe qu'en s'annulant : les droites ci-dessus séparent des zones où le signe est fixe.
Lorsqu'on traverse la droite $y = 0$, le signe de y change, et de même lorsqu'on traverse une droite $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, le signe de $1 - \sqrt{2}\cos(x)$ change.

Pour $x = 0$, $y = 1$, le signe est négatif, les autres signes s'en déduisent de proche en proche.

Les extremums sont à chercher parmi les points où la différentielle de g est nulle, soit $g'_x(x,y) = y\sqrt{2}\sin(x) = 0$ et $g'_y(x,y) = 1 - \sqrt{2}\cos(x) = 0$.

On doit donc chercher l'intersection de la famille de droites $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec la droite $y = 0$, d'où les points $M_{k,\pm} = \left(\pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, 0\right)$, et l'intersection de la famille de droites $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2kp$ avec la famille de droites $x = k'\pi$, intersection qui est vide.

En résumé, les extremums sont à chercher parmi les points $M_{k,\pm}$.

Or $g(M_{k,\pm}) = 0$, donc si $M_{k,\pm}$ est un extremum, $g(x,y)$ doit avoir un signe fixe dans un voisinage de ce point.

D'après l'étude précédente, ce n'est jamais le cas, donc g n'a pas d'extremums.

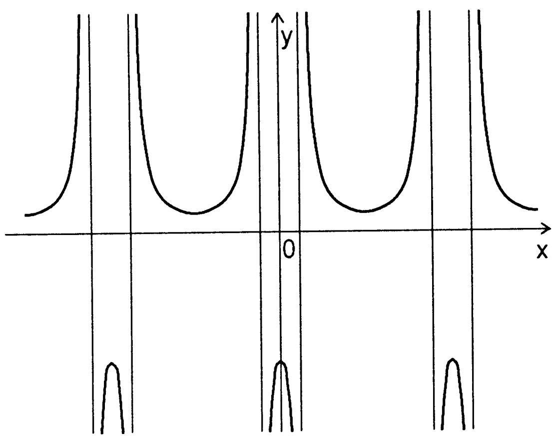
Le point considéré est $M_{0,+}$.

Le gradient en ce point est donc le vecteur nul.

b. Le sous-ensemble d'équation

$$y = \frac{1}{1 - \sqrt{2}\cos(x)}$$

est représenté ci-contre :



La différentielle de g en (x,y) est l'application linéaire associée au produit scalaire par le gradient de g en (x,y) :

$dg_{(x,y)}(h,k) = g'_x(x,y).h + g'_y(x,y).k$

La matrice de dg au point $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ est donc, dans le repère Ox,Oy, $(\sqrt{2},1)$.

Problème D3

La signification des expressions proposées est la suivante :

a. $f(x)$ tend vers 0 avec x.

b. $f(x)$ tend vers 0 avec x.

c. $f(x)$ tend vers 0 avec x et a pour dérivée 2 en 0.

d. $f(x)$ tend vers 0 avec x et a pour dérivée 1 en 0.

e. $f(x)$ tend vers 0 avec x, a pour dérivée 1 en 0 et admet un développement limité à l'ordre 2, égal à x.

f. $f(x)$ tend vers 0 avec x et a pour dérivée 2 en 0.

g. $f(x)$ tend vers 0 avec x, a pour dérivée 1 en 0 et admet un développement limité à l'ordre 2, égal à $x + x^2$.

On a donc la chaîne suivante d'implications :