EXERCICES CORRIGÉS D'ANALYSE

AVEC RAPPELS DE COURS

TOME 2

ETUDE GLOBALE DES FONCTIONS
INTEGRATION
EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Daniel ALIBERT

Presses Universitaires de Grenoble – 1992

La Collection Grenoble Sciences

La Collection Grenoble Sciences fut créée à l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1 - avec un triple objectif :

– permettre d'offrir aux étudiants et usagers des ouvrages à des prix convenables,
– constituer une mémoire pour d'excellents documents qui restent souvent chez leurs auteurs,
– réaliser des ouvrages correspondant vraiment à un objectif clair, en contrepoint des ouvrages réalisés par rapport à tel ou tel programme plus ou moins officiel.

Les documents sont, pour la plupart, publiés dans le seul cadre de l'Université Joseph Fourier. Ceux qui sont destinés à un plus vaste public sont sélectionnés, critiqués par un comité de lecture et édités dans cette collection spécifique des Presses Universitaires de Grenoble.

Directeur de la Collection Grenoble Sciences

Jean BORNAREL, Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1

Comité de lecture de l'ouvrage de Daniel ALIBERT

J. ROBINET, Maître de conférences à l'Université Paris 7

J.P. DEMAILLY, Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1

M. LEGRAND, Maître de conférences à l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1

Déjà parus :

L'ergomotricité. Corps, travail et santé, par M. Gendrier

Chimie. Le minimum vital, par J. Le Coarer

Enzymes, par J. Pelmont

Mathématiques pour les sciences de la nature et de la vie, par F. et J.P. Bertrandias

Endocrinologie. Fondements physiologiques, par S. Idelman

Minimum compétence in scientific English, par J. Upjohn, S. Blattes et V. Jans

Analyse numérique et équations différentielles, par J.P. Demailly

Exercices corrigés d'Analyse – Tome 1, par D. Alibert

Introduction à la Mécanique statistique, par E. Belorizky et W. Gorecki

A paraître :

La symétrie en physique et en chimie, par J. Sivardière

La plongée sous-marine à l'air. L'adaptation de l'organisme et ses limites, par P. Foster

EXTRAITS

EXERCICES

Exercice B1

Soient a et b des réels, avec $a < b$.

Chercher les fonctions réelles, continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ à dérivée bornée, telles que

$$f(b) - f(a) = (b - a) \sup_{a < x < b} \left(f'(x)\right).$$

Exercice B2

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une application continue vérifiant $f \circ f = f$.

a. Etudier l'équation $f(x) = x$.
Tracer un graphe possible pour f.

b. On suppose de plus f dérivable. Déterminer f.

c. Y-a-t'il d'autres solutions si f n'est pas nécessairement dérivable ?

Exercice B3

Soit $g : R \longrightarrow R$, une fonction dérivable.

Conjecture : si la suite $u_n = g(n)$ est convergente, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\bullet} g'(x) = 0$.

Exercice B4

Soit $f :]a,+\infty[\longrightarrow R$, ($a$ peut être $-\infty$), une fonction dérivable telle que $f'(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Conjecture : Alors le graphe de f a une direction asymptotique horizontale en $+\infty$, c'est-à-dire (tome 1 chapitre E) le quotient $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice B5

Tracer le graphe des fonctions ci-dessous : On étudiera les variations de ces fonctions, et on précisera les branches infinies, tangentes aux points remarquables

a. $f(x) = e^{1/x} \sqrt{x\,(x+2)}$

b. $f(x) = (x-1)\, e^{x/(x-1)}$.

Exercice B6

Soit $f : R \longrightarrow R$ une fonction dérivable, à dérivée continue, et x_0 un réel.

Montrer que si $f'(x_0) \neq 0$, alors f est monotone au voisinage de x_0.

Exercice B7

Soient f et g des fonctions dérivables au voisinage de a, et telles que $f(a) = g(a) = 0$. On suppose que la dérivée $g'(x)$ ne s'annule pas au voisinage de a.

Montrer que si le rapport $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ a une limite b lorsque x tend vers a, alors le rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ a également pour rapport b.

Exercice B8

Soit D la couronne définie par $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ et f la fonction définie sur D par

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(\pi \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Déterminer $f(D)$.

ExerciceB9

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable au voisinage de 0, telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, et $f''(0) \neq 0$.

a. Montrer qu'il existe un intervalle $[a,b]$ tel que
- $a < 0 < b$
- $f(a) = f(b)$
- la restriction de f à $[a,0]$, ou à $[0,b]$ est injective.

b. Définir à l'aide de f une bijection continue de $[a,0]$ sur $[0,b]$.

Exercice B10

Soit f une fonction définie sur $[0,+\infty[$, dérivable, telle que $f(x)$ tend vers a quand x tend vers l'infini.

Conjecture 1 : $f'(x)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini.

Conjecture 2 : si f est monotone, $f'(x)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini.

Exercice B11

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow R$, une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$. On suppose que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini. Montrer qu'il existe $b > 0$ tel que $f'(b) = 0$.

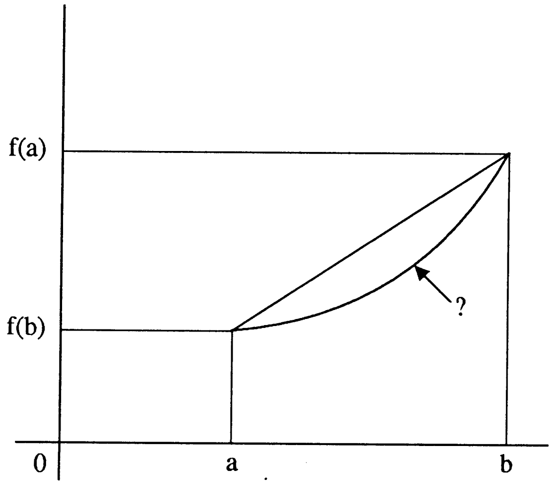
Exercice B12

Soit P un polynôme réel de degré n qui a n racines réelles distinctes. Etudier le nombre de racines distinctes des dérivées $P^{(k)}$.

CORRIGÉS DES EXERCICES

Exercice B1

On pose $M = \sup(f'(x))$. Une exploration graphique est utile : essayons de tracer un graphe de f, pour tout x de $]a,b[$, la pente de la tangente en $(x,f(x))$ doit être inférieure à la pente de la corde joignant $(a,f(a))$ à $(b,f(b))$. Il semble difficile de tracer ce graphe, sauf si f est une fonction affine.



Soit x un point de $]a,b[$. Il existe un point de $]a,x[$, soit c, tel que

$$f(x) - f(a) = (x - a)\, f'(c) \leq (x - a)\, M,$$

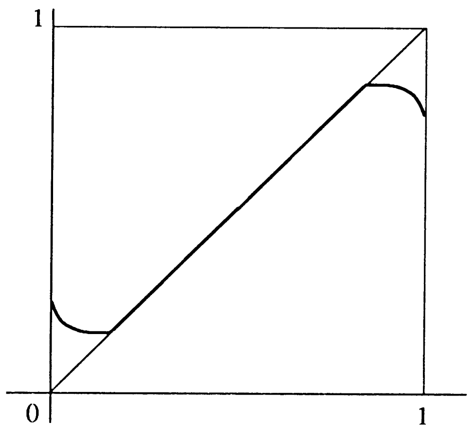
et un point d de $]x,b[$ tel que $f(b) - f(x) = (b - x)\, f'(d) \leq (b - x)\, M$, d'où

$$f(b) - f(a) \leq (b - a)\, M,$$

et il n'y a égalité ci-dessus que si les deux inégalités sont elles-mêmes des égalités. Il en résulte que pour tout x, on a $f(x) = f(a) + (x - a)\, M$, donc la fonction f est bien affine.

Exercice B2

a. On sait que $f(x) = x$ a toujours une solution au moins.
   Ici, en raison de la relation $f \circ f = f$, pour tout x, $f(f(x)) = f(x)$ donc $f(x)$ est une solution.
   Si f n'est pas constante, il y a donc au moins un intervalle de solutions, l'intervalle $f([0,1]) = [\min(f), \max(f)]$.
   Donc entre $\min(f)$ et $\max(f)$ le graphe de f doit se confondre avec la diagonale :



b. L'exemple donné n'est pas dérivable : plus précisément, il y a un point "anguleux" au raccord avec la diagonale, qui semble difficile à éviter, sauf si f est constante, ou égale à l'identité.

C'est ce que nous allons démontrer : si f n'est pas constante, sur l'intervalle non réduit à un point [min(f),max(f)] , on a $f(x) = x$. Au point $m = \min(f)$, on a $f'(m) = 0$, puisqu'il s'agit d'un extremum, sauf si $m = 0$.
Mais d'autre part on a $f'_d(m) = 1$, ce qui est contradictoire.

Il en résulte que $\min(f) = 0$, et de même $\max(f) = 1$.

D'après la remarque faite plus haut, on a bien $f = Id$.

c. En effet, on a d'autres solutions si f n'est pas supposée dérivable : par exemple, $f(x) = \frac{1}{4}$ sur $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $f(x) = x$ sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$, $f(x) = \frac{3}{4}$ sur $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

Exercice B3

Dans l'incertitude quant au résultat, on peut explorer le domaine voisin du problème posé, en regardant "au contraire" si, lorsque $g'(x)$ a une limite finie non nulle, la suite considérée est divergente : essayez avant de lire la suite.
Soit $g : R \longrightarrow R$ dérivable, telle que lorsque x tend vers $+\infty$, $\lim\left(g'(x)\right) = a \neq 0$.
Un essai de représentation graphique semble montrer que dans ce cas $g(x)$ tend vers l'infini, avec le signe de a . On peut le démontrer à l'aide du théorème des accroissements finis [1] . En particulier, $u_n = g(n)$ diverge.
En conclusion, si $\lim\left(g'(x)\right)$ n'est pas nulle, (u_n) diverge.

Est-ce que cela signifie que la contraposée de la conjecture est vraie ? [2]
Mais si $g'(x)$ ne tend pas vers 0 , elle ne tend pas nécessairement vers une limite finie, ni vers l'infini.
L'exploration ci-dessus est donc insuffisante, elle fournit l'énoncé partiel : "si (u_n) est convergente, alors $g'(x)$ n'a pas une limite finie non nulle quand x tend vers $+\infty$" .
On peut essayer également graphiquement, et se convaincre qu'il n'y a pas un rapport étroit entre les valeurs prises par $g(x)$ aux points d'abscisse entière, et le comportement général de la fonction, en particulier de sa dérivée :

---

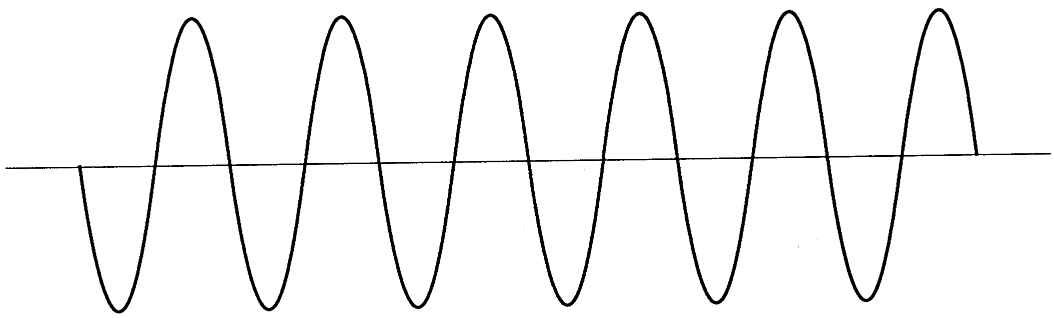
1 Précisons les formulations de l'hypothèse, "pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A tel que $x > A$ entraîne $a - \varepsilon < g'(x) < a + \varepsilon$" .
On utilise le théorème des accroissements finis : supposons a positif.
L'hypothèse montre que pour x assez grand, supérieur à un réel A1 , on a $g'(x) > \frac{a}{2} > 0$.
(prendre $\varepsilon = a/2$)
Or pour x supérieur à A1 , il existe c compris entre x et A1 tel que $g(x) = g(A1) + (x - A1)\, g'(c)$
Donc $g(x) > g(A1) + (x - A1)\, \frac{a}{2}$, donc $g(x)$ tend bien vers l'infini avec x .

2 La contraposée ne se réduit pas à l'énoncé ci-dessus.
Elle s'écrit : "si $g'(x)$ ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers l'infini, alors (u_n) ne converge pas"

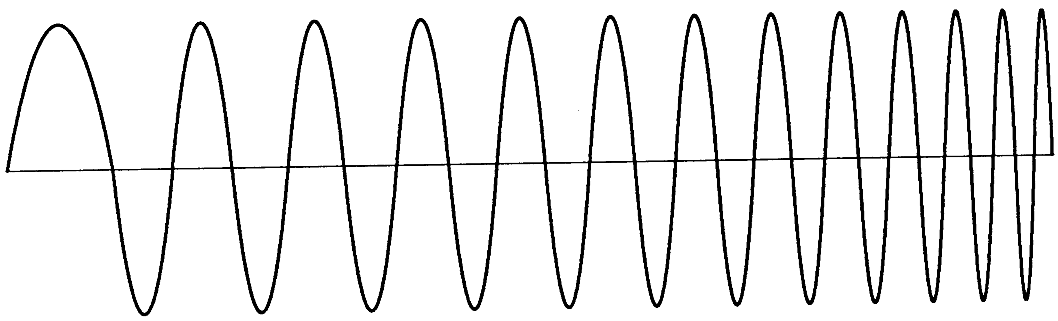
Voici un exemple : $g(x) = \sin\left(2\pi x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ d'où $g'(x) = 2\pi\cos\left(2\pi x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $u_n = g(n) = 1$.

La suite converge, alors que la dérivée n'a pas de limite, ni finie, ni infinie :

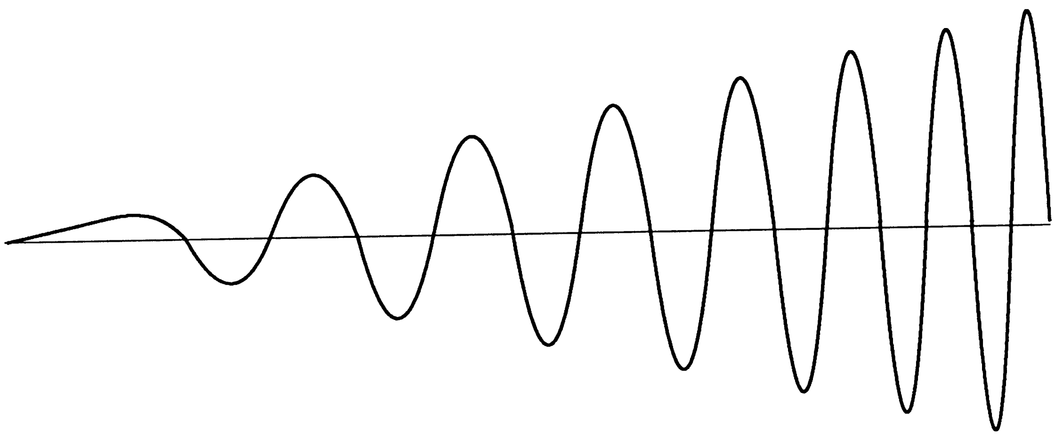
Voici son graphe :



Un autre exemple, où la dérivée diverge de manière encore plus spectaculaire est fourni par $g(x) = \sin(2\pi\, x^2)$,



d'où $g'(x) = 4\pi\, x \cos(2\pi\, x^2)$



et $u_n = g(n) = 0$.

La conjecture proposée est donc fausse.

Problème C3

On définit une fonction g par $g(x) = 1$, si $x \leq 1$, $g(x) = 1 - e^{\left(-(x-1)^2/2\right)}$, si $x > 1$, et on pose $G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$.

a. Etudier la continuité et la dérivabilité de G. Préciser l'aspect de son graphe au voisinage du point d'abscisse $x = 2$, en donnant l'équation de la tangente en ce point, et la position de la courbe par rapport à sa tangente.

b. Tracer le graphe de G.

c. Combien l'équation $G(x) = x - 1$ a-t-elle de solutions dans l'intervalle $]-\infty;2]$?

Problème C4

On note Ω le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ réunion des intervalles $[0;2]$ et $[3;4]$.

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ sur $[0;1]$, $f(x) = 1$ sur $]1;2]$, $f(x) = e^{\sin(x)}$ sur $[3;4]$.

a. La fonction f est-elle intégrable sur Ω ? Si oui, donner un encadrement de son intégrale à 0,5 près.

b. Quel est le domaine de définition de $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$?

c. Tracer le graphe de F.

Problème C5

On note f_t la fonction définie sur $[0;2]$ par $f_t(x) = e^{tx^2}$, si $0 \leq x < 1$, $f_t(x) = t$, si $1 \leq x$. On pose $F(t) = \int_0^2 f_t(x)\, dx$.

a. Quel est le domaine de définition de F ?

b. Tracer le graphe de la fonction F.

c. L'équation $F(t) = 3{,}5\, t$ a-t-elle une solution dans $[1;+\infty[$?

**Problème C6*

Soit $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ bijective, croissante.

a. A l'aide d'une exploration graphique, conjecturer la valeur de

$$I_f = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_0^1 f^{-1}(x)\, dx .$$

b. Calculer I_f, en supposant d'abord f de classe C^1.

c. Calculer I_f, sans cette hypothèse.

Problème C3

Lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures, $g(x)$ tend vers 0, donc g est bornée, et continue sauf en $x = 1$, donc intégrable.

a. La fonction G est continue, comme l'est toujours une fonction intégrale dépendant de la borne supérieure.
Elle est dérivable sauf en $x = 1$, puisque g est continue pour $x \neq 1$.
En $x = 1$, G a une dérivée à gauche valant 1 et une dérivée à droite valant 0.
En $x = 2$, $G'(2) = g(2) = 1 - e^{-1/2}$.
Pour $x > 1$, $G''(x) = g'(x) = (x-1)\ e^{-(x-1)^2/2}$, donc $G''(2) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.
On a donc au voisinage de $x = 2$,

$$G(x) = G(2) + (x-2)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) + \frac{(x-2)^2}{2}\,\frac{1}{\sqrt{e}} + (x-2)^2\ \varepsilon(x-2).$$

Cette expression donne la tangente au graphe, et la position de la courbe par rapport à la tangente en $x = 2$, ici au-dessus.

b. Pour $x \leq 1$, $G(x) = x$.
Lorsque x tend vers $+\infty$, $G(x) = 1 + \displaystyle\int_1^x \left(1 - e^{-(t-1)^2/2}\right) dt$ tend vers $+\infty$,

puisque la fonction $1 - e^{-(x-1)^2/2}$ tend vers 1.
Etudions le quotient $\dfrac{G(x)}{x}$ dans ces conditions :

$$\frac{G(x)}{x} = \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x} - \frac{1}{x}\int_1^x \left(e^{-(t-1)^2/2}\right) dt = 1 - \frac{1}{x}\int_1^x \left(e^{-(t-1)^2/2}\right) dt.$$

Or $e^{-(x-1)^2/2} \leq \dfrac{1}{(x-1)^2}$ pour x assez grand. [1]

On en déduit $\dfrac{G(x)}{x} = 1 - \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^A \left(e^{-(t-1)^2/2}\right) dt - \dfrac{1}{x}\int_A^x \left(e^{-(t-1)^2/2}\right) dt$.

Or $\displaystyle\int_A^x \left(e^{-(t-1)^2/2}\right) dt \leq \int_A^x \left(\frac{1}{(t-1)^2}\right) dt \leq \frac{1}{A-1} - \frac{1}{x-1}$ donc $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_A^x \left(e^{-(t-1)^2/2}\right) dt$

tend vers 0, donc $\dfrac{G(x)}{x}$ tend vers 1.

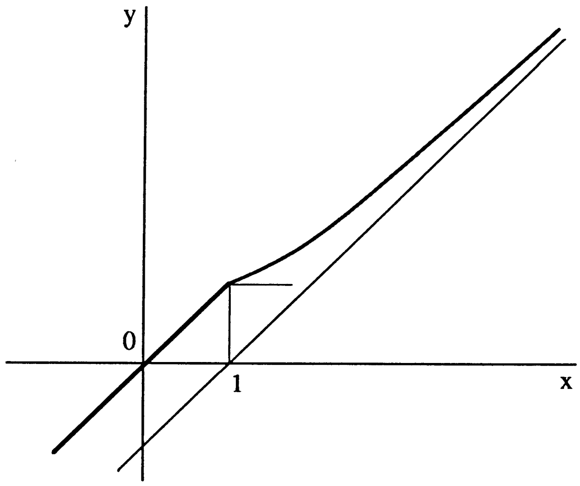
Lorsque x tend vers $+\infty$, le graphe de G a une direction asymptotique de pente 1.

---

[1] En effet, $(x-1)^2 e^{-(x-1)^2/2}$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini, donc il existe A tel que pour $x > A$, $(x-1)^2 e^{-(x-1)^2/2} \leq 1$.

Formons la différence $G(x) - x = -\int_1^x \left(e^{-(t-1)^2/2}\right) dt$.

La fonction figurant au second membre a une limite lorsque x tend vers l'infini [1]. Notons b $(b < 0)$ cette limite, il en résulte que le graphe de G a une asymptote d'équation $y = x + b$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Le graphe a l'allure suivante.



c. On note $H(x) = G(x) - x + 1$.
Pour $x \leq 1$, $H(x) = 1$ et pour $x > 1$, $H'(x) = -e^{-(x-1)^2/2}$.
La fonction H est donc monotone décroissante sur $[1;2]$.
Si l'équation $H(x) = 0$ a une solution dans $]-\infty;2]$, celle-ci est comprise entre 1 et 2, et unique.
Utilisons le théorème des valeurs intermédiaires : l'équation a une solution si et seulement si $H(1)$ et $H(2)$ ont des signes différents.
Or $H(1) = 1 = G(1)$, et $H(2) = G(2) - 1$, donc comme G est croissante, $G(2) > G(1)$, donc $H(2) > 0$.
L'équation proposée n'a pas de racine.

Problème C4

a. La fonction f est bornée, continue par morceaux, donc intégrable.
Soit $I = \int_\Omega f$. On décompose I en trois intégrales :

- Sur $[0;1]$: $I_1 = \int_0^1 \sqrt[3]{x+1}\, dx = \frac{3}{4}\left[(x+1)^{4/3}\right]_0^1$, $I_1 = \frac{3}{4}\, 2^{4/3} - \frac{3}{4}$, donc

$$1{,}139 < I_1 < 1{,}140 .$$

[1] En effet elle est décroissante, et minorée, comme on l'a vu plus haut.