

**EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS**  
**DE**  
**MÉCANIQUE STATISTIQUE**

ELIE BELORIZKY ET WLADIMIR GORECKI

**Presses Universitaires de Grenoble**  
**1994**

### ***La Collection Grenoble Sciences***

La Collection Grenoble Sciences fut créée à l'Université Joseph Fourier avec un triple objectif :

- permettre d'offrir aux étudiants et usagers des ouvrages à des prix convenables,
- constituer une mémoire pour d'excellents documents qui restent souvent chez leurs auteurs,
- réaliser des ouvrages correspondant vraiment à un objectif clair, en contrepoint des ouvrages réalisés par rapport à tel ou tel programme plus ou moins officiel.

Les documents sont, pour la plupart, publiés dans le seul cadre de l'Université Joseph Fourier. Ceux qui sont destinés à un plus vaste public sont sélectionnés, critiqués par un comité de lecture et édités dans cette collection spécifique des Presses Universitaires de Grenoble.

### ***Directeur de la Collection Grenoble Sciences***

Jean BORNAREL, Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1

### ***Déjà parus :***

L'ergomotricité. Corps, travail et santé - M. Gendrier  
Chimie. Le minimum vital - J. Le Coarer  
Enzymes - J. Pelmont  
Mathématiques pour les sciences de la nature et de la vie - F. et J.P. Bertrandias  
Endocrinologie. Fondements physiologiques - S. Idelman  
Minimum competence in scientific English - J. Upjohn, S. Blattes et V. Jans  
Analyse numérique et équations différentielles - J.P. Demailly  
Introduction à la Mécanique statistique - E. Belorizky et W. Gorecki  
Exercices corrigés d'Analyse (tomes 1 et 2) - D. Alibert  
Bactéries et environnement. Adaptations physiologiques - J. Pelmont  
La plongée sous-marine à l'air. L'adaptation de l'organisme et ses limites - P. Foster  
Listening comprehension for scientific English - J. Upjohn  
Electrochimie des solides - C. Déportes *et al.*  
La Turbulence - M. Lesieur

### ***A paraître :***

La symétrie en mathématiques, en physique et en chimie - J. Sivardière  
La cavitation. Mécanismes physiques et aspects industriels  
Devenir et effets du médicament dans l'organisme - P. Demenge

# **EXTRAITS**

L'énergie interne est

$$U = - \frac{d}{d\beta} \text{Ln } Z = N \frac{d}{d\beta} \text{Ln} (1 - e^{-\beta\epsilon}) = N\epsilon \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1} .$$

L'énergie libre s'écrit

$$F = - k_B T \text{Ln } Z = \frac{N}{\beta} \text{Ln} (1 - e^{-\beta\epsilon})$$

et l'entropie est donnée par

$$S = \frac{U - F}{T} = Nk_B \left[ \frac{\beta\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} - \text{Ln} (1 - e^{-\beta\epsilon}) \right] \quad (8)$$

en accord avec le résultat exprimé par l'équation (7).

## ***IV.5. TEMPÉRATURES NÉGATIVES***

Soit un système de  $N \gg 1$  atomes localisés sans interactions possédant chacun deux états simples d'énergie  $0$  et  $\epsilon > 0$ . (Il peut s'agir par exemple de moments magnétiques de spin  $1/2$  soumis à un champ d'induction  $B$  dont les deux niveaux Zeeman sont  $\pm B$ , on a alors  $\epsilon = 2 B$ .) Soit  $n$  le nombre d'atomes dans l'état excité.

- 1) Quelle est l'énergie interne  $U(n)$  du système. Quelle est sa valeur maximale ?
- 2) Calculer l'entropie  $S(n)$  de ce système. Donner une expression approchée de  $S$  pour  $n \gg 1$  et  $N - n \gg 1$ . Pour quelle valeur de  $n$  l'entropie est-elle maximale ? Tracer la courbe  $S(n) / k_B$ .
- 3) Exprimer la température  $T$  de ce système lorsque  $n \gg 1$  et  $N - n \gg 1$ . Montrer que  $T$  peut être négative pour des valeurs de  $n$  que l'on précisera.
- 4) Pourquoi peut-on avoir des températures négatives dans ce système mais pas pour un gaz dans une boîte ?
- 5) On met le système étudié, supposé à température négative  $T$ , en contact thermique avec un autre système à température positive  $T_1$ . Que se passe-t-il ?

Dans un cadre thermodynamique le système à température négative est-il plus "chaud" ou plus "froid" que le système à température positive ?

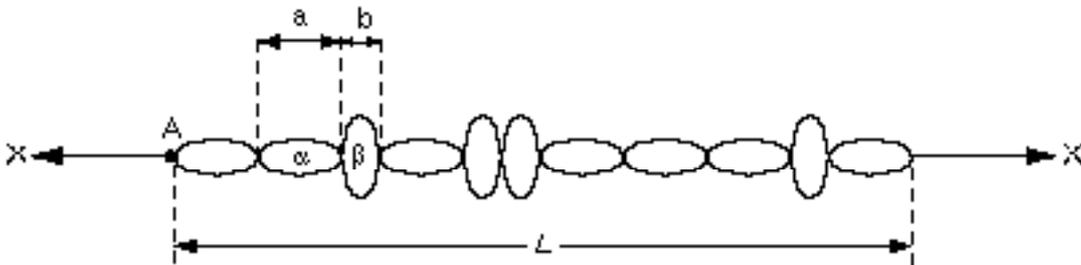
6) Si pour  $T = 10 \text{ K}$ ,  $\chi T = 0,5$ , on a en posant  $x = \frac{A}{k_B T}$ :

$$e^x = 4, \text{ soit } x = 2 \text{ Ln } 2 \text{ et } \frac{A}{k_B} = 20 \text{ Ln } 2 = 13,86 \text{ K}.$$

La séparation à champ nul des niveaux  $E_{\pm 1}$  et  $E_0$  est  $\frac{A}{k_B} = 13,86 \text{ K}$ .

### V.16. ELASTICITÉ DE LA LAINE

On considère une macromolécule constituée d'un très grand nombre  $N$  d'unités (monomères) formant une chaîne parallèle à un axe  $x$ . Chaque unité peut être dans l'un des deux états  $\alpha$  ou  $\beta$ . Dans l'état  $\alpha$ , le monomère est parallèle à la chaîne, son énergie vaut  $E_\alpha$  et sa longueur selon  $x$  est  $a$ . Dans l'état  $\beta$ , le monomère est perpendiculaire à la chaîne, son énergie est  $E_\beta$  et sa longueur selon  $x$  est  $b$ . On suppose une extrémité  $A$  fixée et l'on tire sur l'autre extrémité avec une tension  $X$ .



On admettra donc que sous l'effet de la tension  $X$ , il faut ajouter à l'énergie interne des unités monomères, le terme  $-XL$  ( $L$  longueur de la chaîne). Il s'agit d'un modèle simplifié des molécules de kératine dans la laine. C'est le mécanisme à la base de l'élasticité de la laine.

- 1) Donner l'expression de la longueur  $L$  de la chaîne en fonction du nombre  $N_\alpha$  de monomères dans l'état  $\alpha$ .
- 2) Donner l'expression de l'énergie  $E$  de la chaîne en fonction de  $N_\alpha$  et des autres paramètres du problème.
- 3) On suppose le système isolé.
  - a) Donner en fonction de  $N_\alpha$  le nombre d'états accessibles du système.
  - b) Calculer l'entropie  $S$  en fonction de  $N_\alpha$  en considérant  $N_\alpha$  et  $N$  comme de très grands nombres.

c) Calculer  $\left(\frac{\partial S}{\partial N_\alpha}\right)_N$  et  $\left(\frac{\partial E}{\partial N_\alpha}\right)_N$ .

d) La chaîne est suffisamment grande pour définir sa température d'équilibre. Etablir à l'aide des résultats précédents une relation entre  $T$ ,  $X$ ,  $N_\alpha$  et les autres paramètres du problème.

e) En déduire l'expression de la longueur moyenne de la chaîne  $L$  en fonction de  $N$ ,  $a$ ,  $b$  et  $\Delta = \frac{E_\alpha - E_\beta}{k_B T}$  et  $y = \frac{(a-b)X}{k_B T}$ .

4) On peut obtenir plus simplement ce résultat en considérant que la chaîne est en équilibre avec un thermostat à température  $T$ .

a) Ecrire la multiplicité d'un état d'énergie  $E$ .

b) Calculer la fonction de partition  $Z$ . Montrer qu'on peut la simplifier de manière considérable en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^N C_N^k a^k b^{N-k} \quad C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}.$$

c) En déduire la longueur moyenne  $\bar{L}$  de la chaîne en fonction de  $N$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\Delta$  et  $y$ . Comparer avec la troisième question.

5) Il est possible d'obtenir encore plus simplement  $Z$ . Vérifier que l'énergie de la chaîne est la même si l'on considère que l'énergie de chaque monomère est  $E_\alpha - X a$  ou  $E_\beta - X b$  selon que le monomère est dans l'état  $\alpha$  ou  $\beta$ . On peut alors considérer la chaîne comme  $N$  chaînons indépendants ayant 2 énergies possibles  $E_\alpha - X a$  ou  $E_\beta - X b$ . En déduire la fonction de partition de chaque chaînon et celle de la chaîne  $Z$ . Comparer avec 4) b).

6) Calculer  $\bar{L}/N b$  en fonction de  $a/b$ ,  $\Delta$  et  $y$ . En déduire  $\bar{L}$  lorsque  $(\Delta - y) \gg 1$  et  $(\Delta - y) \ll -1$ .

Au voisinage de quelle valeur de  $y/\Delta$ ,  $\bar{L}$  change-t-il de manière significative ?

Application numérique :  $b/a = 4/5$  ;  $\Delta = 10$ . Tracer  $\bar{L}/N b$  en fonction de  $y$  pour  $0 < y < 20$ . (On donnera la valeur exacte pour  $y = 10$ ). Interpréter le résultat en fonction de  $X$  dans le cadre du raisonnement du 5).

## V.20. MODÈLE SIMPLIFIÉ DU DÉBOBINAGE DE DEUX MOLÉCULES D'ADN

On va établir un modèle très simplifié du débobinage de deux molécules d'ADN à double hélice. On considère qu'il s'agit, à l'échelle moléculaire, d'une fermeture éclair possédant  $N$  chaînons. Chaque chaînon a un état dans lequel il est fermé avec une énergie  $0$  et un état ouvert avec une énergie  $\varepsilon$ . On exige cependant que la fermeture éclair ne puisse s'ouvrir qu'à partir d'une extrémité (gauche par exemple) et que le chaînon  $s$  ne puisse s'ouvrir que si tous les chaînons à gauche  $1, 2, \dots, s-1$  sont déjà ouverts. On suppose le système en équilibre avec un bain à température  $T$ .

- A.**
- 1) Un état possible du système correspond aux  $s$  premiers chaînons ouverts. Quelle est son énergie ?
  - 2) Calculer la somme d'états  $Z$  du système.
  - 3) On suppose que  $\varepsilon \gg k_B T$  et  $N \gg 1$ . Simplifier  $Z$ . Calculer  $\bar{E}$  et en déduire le nombre moyen  $\bar{s}$  de chaînons ouverts.
- B.** En fait l'hypothèse selon laquelle chaque chaînon ne possède qu'un seul état ouvert est irréaliste car les deux parties d'un chaînon ouvert peuvent avoir plusieurs orientations relatives. On peut améliorer le modèle en supposant que chaque chaînon ouvert possède  $g$  états d'énergie. Un état avec  $s$  chaînons ouverts est donc  $g^s$  fois dégénéré.

- 1) Calculer la nouvelle fonction de partition  $Z$ .

- 2) On pose 
$$x = g \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right).$$

Même si  $\frac{\varepsilon}{k_B T} \gg 1$ , par suite de la valeur de  $g$ ,  $x$  peut être supérieur à 1 et le comportement thermique du système sera très différent selon que  $x > 1$  ou  $x < 1$ . On désigne par  $T_0$  la valeur de  $T$  pour laquelle  $x_0 = 1$ . On suppose que

$$T = T_0 + \Delta T, \quad \left( \Delta T > 0 \text{ ou } < 0 ; \left| \frac{\Delta T}{T_0} \right| \ll 1 \right).$$

On a alors  $x = 1 + \Delta x$ .

Exprimer  $\Delta x$  en fonction de  $\frac{\Delta T}{T_0}$  et de  $\ln g$  (au premier ordre en  $\Delta T$ ).

- 3) On pose  $e^y = x^{N+1}$  .  
 Si  $N$  est très grand,  $|y|$  peut très bien être  $\gg 1$  même si  $\Delta x \ll 1$  . Calculer  $Z$  en fonction de  $y$  et  $N$  lorsque  $\Delta x \ll 1$  .
- 4) Calculer, dans ces conditions, le nombre moyen  $\bar{s}$  de chaînons ouverts en fonction de  $y$  et  $N$  .  
 Cas particuliers où  $y \gg 1$  et  $y \ll -1$  .
- 5) On prend  $N + 1 = 10^4$  ,  $\text{Ln } g = 10$  . Calculer le pourcentage  $\frac{\bar{s}}{N}$  de chaînons ouverts pour  $y = 100$  et  $y = -100$  . Calculer les valeurs de  $\frac{\Delta T}{T_0}$  correspondant à ces deux situations. Montrer que l'on a une transition très étroite au voisinage de  $T_0$  correspondant à une situation où presque tous les chaînons sont fermés pour  $T = T_0 - |\Delta T|$  et où presque tous les chaînons sont ouverts pour  $T = T_0 + |\Delta T|$  .

### SOLUTION

A. 1) Si l'on a  $s$  chaînons ouverts,  $E_s = s \varepsilon$  .

2) La somme d'états est :

$$Z = \sum_{s=0}^N e^{-\beta E_s} = \sum_{s=0}^N e^{-\beta s \varepsilon} \quad \text{avec } \beta = \frac{1}{k_B T} .$$

Donc 
$$Z = \frac{1 - e^{-\beta \varepsilon (N+1)}}{1 - e^{-\beta \varepsilon}} .$$

3) Avec  $\beta \varepsilon \gg 1$  et  $N \gg 1$  , on peut simplifier  $Z$  sous la forme :

$$Z = \frac{1}{1 - e^{-\beta \varepsilon}} .$$

On en déduit que 
$$\bar{E} = -\frac{d}{d\beta} \text{Ln } Z = \frac{\varepsilon}{e^{\beta \varepsilon} - 1} .$$

Le nombre de chaînons ouverts, est en moyenne,

$$\bar{s} = \frac{\bar{E}}{\varepsilon} = \frac{1}{e^{\beta \varepsilon} - 1} \ll 1 .$$

### VI.15. FLUX DE FUITE D'UN GAZ À TRAVERS UN TROU

On considère un grand récipient contenant un gaz à faible pression en équilibre thermodynamique à la température  $T$ . On désigne par  $n$  le nombre de molécules du gaz par unité de volume du récipient. On perce un très petit trou de surface  $S$  sur une paroi normale à un axe  $Oz$ . On suppose qu'il y a le vide à l'extérieur de cette paroi. On cherche le nombre de molécules qui quittent le récipient par unité de temps, c'est-à-dire le flux  $\Phi$  sortant de molécules. On supposera le trou très petit devant le libre parcours moyen des molécules, de sorte que le gaz est en équilibre à chaque instant.

1) Calculer  $\Phi$  en fonction de  $n$ ,  $\bar{s}$  la vitesse absolue moyenne des molécules et  $S$ .

(Indication : on pourra considérer d'abord toutes les molécules ayant la même vitesse absolue  $s$  et une distribution isotrope de leur direction, puis tenir compte de la distribution de  $s$ .)

2) Calculer  $\bar{s}$ .

3) Donner l'expression de  $\Phi$  en fonction de  $n$ ,  $k_B T$ ,  $m$  et  $S$ .

4) Retrouver tous ces résultats à partir d'un calcul direct en coordonnées cartésiennes en utilisant la distribution de Maxwell des vitesses.

5) D'une manière générale quel est le nombre de collisions des molécules avec une paroi de surface unité, par seconde ?

#### SOLUTION

1) Si toutes les molécules ont la même vitesse absolue  $s$ , le flux de particules sortant par unité de temps est :

$$\Phi = \frac{n}{2} s \overline{\cos \theta} S .$$

En effet seules les molécules se dirigeant vers la paroi peuvent sortir, d'où le facteur  $1/2$ . Notons que l'angle  $\theta$  entre les directions de  $\vec{s}$  et  $z$  doit être compris entre  $0$  et  $\pi/2$ .

$$\text{Ainsi} \quad \overline{\cos \theta} = \frac{\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta}{\int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta} = \left. \frac{\sin^2 \theta}{2} \right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} .$$

D'après les équations (1), (2) et (3) on a

$$\text{Ln} \left( \frac{k_B T}{P} \right) + \frac{3}{2} \text{Ln} \left( \frac{2 \pi m k_B T}{h^2} \right) = - \text{Ln} n' + \text{Ln} \left( \frac{2 \pi m k_B T}{h^2} \right) + \frac{\varepsilon_0}{k_B T},$$

d'où

$$n' = \left( \frac{h^2}{2 \pi m k_B T} \right)^{1/2} \frac{P}{k_B T} \exp \left( \frac{\varepsilon_0}{k_B T} \right). \quad (4)$$

#### VIII.4. EMPOISONNEMENT PAR LE MONOXYDE DE CARBONE

Lorsqu'il y a empoisonnement par le monoxyde de carbone, les molécules de CO remplacent les molécules de O<sub>2</sub> adsorbées sur les molécules d'hémoglobine (Hb) du sang. Pour montrer cet effet, on considère un modèle dans lequel chaque site des molécules Hb peut être vacant avec une énergie nulle, ou occupé, soit par une molécule O<sub>2</sub> avec l'énergie E<sub>A</sub>, soit par une molécule de CO avec une énergie E<sub>B</sub>.

On considère N molécules Hb, avec N sites disponibles, en équilibre avec de l'oxygène O<sub>2</sub> et du monoxyde de carbone CO en phase gazeuse, à des concentrations telles que les activités absolues soient  $\lambda_A(\text{O}_2) = 1 \times 10^{-5}$  et  $\lambda_B(\text{CO}) = 1 \times 10^{-7}$ , à la température du corps 37°C. (On négligera tout facteur provenant d'une multiplicité de spin).

- 1) On considère d'abord le système en l'absence de CO. On constate que 90% des sites Hb sont occupés par une molécule O<sub>2</sub>. Déterminer E<sub>A</sub> en électron-volts.
- 2) On est maintenant en présence de CO dans les conditions données plus haut. On constate que 10% des sites Hb sont occupés par une molécule de O<sub>2</sub>. Déterminer E<sub>B</sub> en eV.
- 3) En assimilant O<sub>2</sub> et CO à des gaz parfaits, à quel rapport n<sub>A</sub>/n<sub>B</sub> de concentrations correspondent les activités précédentes ? Commenter le résultat.

#### SOLUTION

1) D'une manière générale, si l'on pose

$$\lambda_A \exp \left( - \frac{E_A}{k_B T} \right) = x \quad \text{et} \quad \lambda_B \exp \left( - \frac{E_B}{k_B T} \right) = y,$$

Donc 
$$P = \frac{2}{3} \frac{U_0}{V} = \frac{2}{5} n E_F = \frac{2}{5} n \frac{p_F^2}{2m_e},$$

soit avec les conditions posées,

$$P = \frac{10^{-2}}{5} n m_e c^2 = 9,6 \times 10^{16} \text{ N/m}^2 .$$

### ***IX.16. MASSE CRITIQUE D'EFFONDREMENT D'UNE ÉTOILE À TEMPÉRATURE NULLE***

On assimile une étoile à une sphère de masse volumique constante  $\rho$  et de température nulle. La pression interne provient des électrons dégénérés et relativistes.

- 1) Calculer à  $T = 0$ , l'énergie interne par électron  $U/N$  d'un gaz d'électrons ultrarelativiste. Cette énergie sera exprimée d'abord en fonction du niveau de Fermi puis en fonction du nombre d'électrons  $n$  par unité de volume.
- 2) L'étoile est constituée de baryons (protons et neutrons) et a une masse volumique  $\rho$ . Il y a en moyenne  $z$  électrons par baryon (si l'étoile est constituée principalement d'hydrogène  $z = 1$  car chaque proton est apparié à un électron ; si elle est constituée d'hélium  $z = 1/2$  car chaque électron est associé à un proton et un neutron ; enfin  $z \cong 0,46$  si l'étoile est constituée de  $^{56}\text{Fe}$  essentiellement).

Donner une expression de l'énergie électronique par baryon  $E_{el}$  en fonction de  $z$ ,  $\rho$ ,  $m$  (masse du baryon :  $m_p = m_n = m = 1,67 \times 10^{-24} \text{ g}$ ),  $h$  et  $c$ . Donner numériquement  $E_{el}$  en eV/baryon en fonction de  $z$  et  $\rho$ .

- 3) Calculer l'énergie gravitationnelle par baryon  $E_{gr}$  en fonction de  $G$  (constante de gravitation),  $m$ ,  $M$  masse de l'étoile et  $\rho$  ( $\text{g cm}^{-3}$ ).

Faire apparaître la masse solaire  $M_\odot = 2,0 \times 10^{33} \text{ g}$ ,  $\rho_\odot = 1 \text{ g cm}^{-3}$  et donner numériquement  $E_{gr}$  en eV/baryon en fonction de  $\rho$  et  $M/M_\odot$ .

- 4) Calculer le rapport  $M/M_\odot$  au-delà duquel l'énergie gravitationnelle l'emporte sur l'énergie électronique. On obtient ainsi la masse critique de Chandrasekhar qui correspond à l'effondrement de l'étoile. Calculer cette masse critique  $M_c$  en fonction de  $M_\odot$  et  $z$ .

### ***XI.12. MOUVEMENT D'UNE PARTICULE DANS UN FLUIDE***

On se propose de retrouver les résultats obtenus grâce à l'équation de Langevin par une méthode plus rigoureuse. Soit un petit objet de masse  $M$  plongé dans un fluide à une température  $T$ . Cet objet subit un mouvement aléatoire provoqué par les collisions avec les molécules du fluide. On s'intéresse au mouvement de l'objet selon une direction  $x$ .

Pour  $t = 0$ , on a  $x(0) = 0$ ,  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v(0) = 0$ .

Les forces agissant sur l'objet sont d'une part la force de résistance visqueuse  $-\beta M v$ , et d'autre part une force aléatoire  $M A(t)$  due au bombardement de l'objet par les molécules du liquide qui est présente lorsque l'objet est au repos.

On a  $\overline{A(t)} = 0$  et  $\overline{A(t)A(t')} = a \delta(t - t')$

où  $a$  est une constante à déterminer (les barres désignent des moyennes statistiques).

1) Ecrire l'équation différentielle du mouvement de l'objet.

2) Montrer que pour  $t > 0$ , on a

$$v(t) = \int_0^t A(s) \exp[\beta(s-t)] ds.$$

3) Calculer  $\overline{v(t)v(t')}$  en fonction de  $a$ ,  $\beta$ ,  $t$  et  $t'$ .

4) Evaluer  $\overline{v^2(t)}$  à partir du théorème d'équipartition de l'énergie cinétique et en déduire l'expression de  $a$  pour  $t$  assez grand.

5) Calculer  $\overline{x^2(t)}$  à partir du résultat de la troisième question.

6) En déduire la limite de  $\overline{x^2(t)}$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Cette valeur limite, exprimée en fonction de  $k_B$ ,  $T$ ,  $M$ ,  $\beta$  et  $t$ , sera comparée au résultat bien connu donné par l'équation de Langevin.

### ***SOLUTION***

1) L'équation du mouvement de l'objet s'écrit :

$$M \frac{dv}{dt} = -\beta M v + M A(t)$$

d'où l'expression de la susceptibilité cherchée

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{n \frac{g^2 \mu_B^2 S(S+1)}{3 k_B T}}{1 - \lambda \frac{n \frac{g^2 \mu_B^2 S(S+1)}{3 k_B T}}$$

2) Si l'on introduit la constante de Curie

$$C = \mu_0 \frac{n \mu^2}{k_B} \frac{S+1}{3S} = \mu_0 \frac{n g^2 \mu_B^2 S(S+1)}{3 k_B}$$

on obtient

$$\chi = \frac{\frac{C}{T}}{1 - \frac{\lambda C}{T}}$$

Mais nous avons vu que

$$T_c = \frac{\lambda C}{0}$$

donc

$$\chi = \frac{C}{T - T_c} \quad (T > T_c)$$

Il est clair que pour  $T = T_c$ ,  $\chi$  diverge.

## ***XII.4. MODÈLE DU CHAMP MOYEN POUR UN FERROMAGNÉTIQUE DE TYPE ISING***

- 1) Sur chacun des  $N$  sites d'un réseau cubique simple on a un atome magnétique. Par suite de l'anisotropie cristalline locale, chaque moment ne peut prendre que deux valeurs  $+$  et  $-$ . On suppose d'abord ces moments sans interactions et en l'absence de champ extérieur. On désigne par  $M$  le moment magnétique total et par  $m = n \mu = \frac{M}{N}$  le moment magnétique moyen de chaque atome. Calculer le nombre de configurations de ce système  $g(N, n)$  et en déduire l'entropie  $S(N, n)$ . Donner une expression approchée de  $S$  lorsque  $N \gg 1$ . Quelles sont les valeurs limites de  $S$  pour  $n = 0$  et  $n = 1$  ?

- 2) On considère maintenant un moment  $\sigma_i$  entouré de ses  $z = 6$  proches voisins. On suppose que l'interaction entre deux moments  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  proches voisins se met sous la forme

$$H_{ij} = -A \sigma_i \sigma_j = -J \sigma_i \sigma_j$$

où  $J = A$  est une interaction dite d'échange et où  $\sigma_i = \pm 1$  (modèle d'Ising). L'interaction entre deux moments non proches voisins est supposée nulle. Ainsi l'Hamiltonien d'interaction entre un moment  $\sigma_i$  et ses  $z$  proches voisins  $\sigma_j$  s'écrit

$$H(i) = -J \sigma_i \sum_{j=1}^6 \sigma_j .$$

A toute température, l'approximation du champ moyen consiste à remplacer  $H(i)$  par l'énergie moyenne  $\bar{H}(i)$  où les  $\sigma_j$  sont remplacés par leur valeur moyenne  $n$  (ce qui revient à remplacer  $\sigma_j$  par le moment magnétique moyen  $m$ ). Ecrire, dans le cadre de cette approximation l'Hamiltonien total  $H_T$  du système. Donner l'expression de l'énergie totale moyenne définie par  $U = H_T$  en fonction de  $J$ ,  $z$ ,  $N$  et  $n$ . En déduire l'expression de l'énergie libre  $F(T, n)$ .

- 3) Ici  $n$  joue le rôle d'un paramètre d'ordre. Exprimer la condition d'équilibre thermodynamique et en déduire une expression de la valeur correspondante  $n_e$  de  $n$  sous la forme d'une équation implicite faisant intervenir la température.
- 4) Donner l'expression de la température critique  $T_c$  au-dessous de laquelle on a une solution non nulle de l'équation précédente, c'est-à-dire une valeur non nulle  $m$  du moment magnétique moyen de chaque site. ( $T_c$  s'exprimera en fonction de  $z$ ,  $J$  et  $k_B$  uniquement).
- 5) Tracer l'allure de la courbe  $n_e(T)$  pour  $T \leq T_c$ . On précisera en particulier les pentes  $\frac{dn_e}{dT}$  lorsque  $T \rightarrow 0$  et lorsque  $T \rightarrow T_c$ .
- 6) Montrer que lorsque  $T \rightarrow T_c$  par valeurs inférieures, on a

$$m(T) \cong a \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^\beta ;$$

donner les valeurs de l'exposant critique  $\beta$  et de la constante  $a$ .

- 7) A partir de l'énergie interne du système à l'équilibre, exprimer la capacité calorifique  $C$  à volume constant en fonction de  $n_e$  et  $T$ . Tracer l'allure de la courbe  $C(T)$ . Quel est le comportement de  $C$  lorsque  $T \rightarrow T_c$  ?