MATHÉMATIQUES
POUR L'ÉTUDIANT SCIENTIFIQUE

TOME 1

Philippe-Jacques HAUG

EDP SCIENCES

7, avenue du Hoggar
Parc d'Activité de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Grenoble Sciences

Grenoble Sciences poursuit un triple objectif :

- réaliser des ouvrages correspondant à un projet clairement défini, sans contrainte de mode ou de programme,
- garantir les qualités scientifique et pédagogique des ouvrages retenus,
- proposer des ouvrages à un prix accessible au public le plus large possible.

Chaque projet est sélectionné au niveau de Grenoble Sciences avec le concours de referees anonymes. Puis les auteurs travaillent pendant une année (en moyenne) avec les membres d'un comité de lecture interactif, dont les noms apparaissent au début de l'ouvrage. Celui-ci est ensuite publié chez l'éditeur le plus adapté.

(Contact : Tél. : (33)4 76 51 46 95, e-mail : Nicole.Sauval@ujf-grenoble.fr)

Deux collections existent chez EDP Sciences :

- la ***Collection Grenoble Sciences***, connue pour son originalité de projets et sa qualité
- ***Grenoble Sciences - Rencontres Scientifiques***, collection présentant des thèmes de recherche d'actualité, traités par des scientifiques de premier plan issus de disciplines différentes.

Directeur scientifique de Grenoble Sciences

Jean BORNAREL, Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1

Comité de lecture pour "Mathématiques pour l'étudiant scientifique"

- **Denise GRENIER**, Maître de conférences à l'Université Joseph Fourier - Grenoble
- **Jean BORNAREL**, Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble
- **François BRUT**, Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble

et

- **Valérie-Anne MARTY**
- **Pierre GIRAUD-BIT**
- **Laurent TAMANTINI**

Grenoble Sciences reçoit le soutien du **Ministère de l'Éducation nationale,** du **Ministère de la Recherche**, de la **Région Rhône-Alpes**, du **Conseil général de l'Isère** et de la **Ville de Grenoble**.

Réalisation et mise en pages : Centre technique Grenoble Sciences
Illustration de couverture par Alice Giraud

ISBN 2-86883-494-9

EXTRAITS

Leonardo Fibonacci, ou Léonard de Pise (aux environs de 1170 - après 1240)

Né à Pise, il accompagnait son père lorsque celui-ci dirigeait un comptoir commercial à Bejaïa (autrefois Bougie, à environ 200 km à l'est d'Alger) pour le compte de la république de Pise, importante puissance commerciale de l'Italie du nord. Il fut également amené par son travail dans des pays méditerranéens, comme l'Egypte, la Syrie, Byzance. C'est évidemment ainsi qu'il est entré en contact avec les mathématiques arabes et, par leur intermédiaire, avec les mathématiques grecques.
Après 1200, on le retrouve à Pise (où il devait mourir), écrivant ses ouvrages mathématiques. Sa renommée était très grande ; c'est ainsi que l'empereur Frédéric II s'arrête à Pise pour le voir répondre à des défis mathématiques.
Son apport le plus marquant est l'introduction en Europe occidentale des mathématiques arabes. En particulier, il a importé les règles de la numération que nous utilisons actuellement (numération décimale de position, avec l'usage des chiffres arabes) ; il propose, dans ce cadre, des solutions à de nombreux problèmes qui se rencontrent dans le commerce.
Il étudie des problèmes d'algèbre du premier et du second degré et, exceptionnellement, du troisième degré ; il étudie la fameuse "suite des lapins" ; il s'intéresse à des problèmes d'arithmétique, comme la recherche d'un rationnel $\mathbf{x}$ tel que $\mathbf{x}^2 + 5$ et $\mathbf{x}^2 - 5$ soient les carrés de rationnels ("$\mathbf{x}^2 + 5$" n'est pas du tout l'écriture de Léonard de Pise, qui s'exprimait sans utiliser de notation symbolique – il faudra attendre plusieurs siècles pour que l'écriture symbolique, qui nous paraît si naturelle, se mette en place et devienne universelle). Indiquons encore qu'il reprend une partie de la géométrie d'Euclide, apportant parfois des solutions algébriques aux problèmes géométriques.

Karl Weierstrass (1815 - 1897)

Bien que très tôt passionné par les mathématiques, il entreprit des études menant à l'administration publique ; mais au grand regret de sa famille, il les interrompit pour se consacrer uniquement aux mathématiques. Jusqu'à 40 ans, il fut professeur dans des écoles secondaires, enseignant les mathématiques mais aussi l'histoire, la biologie, la gymnastique… , et même la calligraphie. En 1856, il fut appelé à l'Université de Berlin, ville où il résida jusqu'à sa mort.
Son œuvre, presque uniquement consacrée à l'analyse, eut une ampleur et une influence considérable ; il eut parmi ses étudiants ou auditeurs un nombre impressionnant de mathématiciens importants, comme Hermann Schwarz, ou de tout premier plan, comme Felix Klein (1849 - 1925) ou Sophus Lie (1842 - 1899).
Parmi eux, Sofia Kowaleskaïa (1850 - 1891) doit être citée à part. A 18 ans, comme bien des jeunes filles russes de son milieu (propriétaires terriens aisés), elle a fait un mariage de convention pour échapper à la tutelle de sa famille et pouvoir étudier à l'étranger. Peu d'universités acceptaient des étudiantes, et elle a ainsi été la première étudiante admise à l'université de Heidelberg. L'université de Berlin n'acceptant pas les étudiantes, Weierstrass lui a donné un enseignement en tête-à-tête qui fut à l'origine d'échanges scientifiques de qualité, et aussi de rapports sentimentaux difficiles.
Weierstrass obtint que Sofia Kowaleskaïa reçoive le titre de docteur de l'université de Göttingen (en l'absence de l'intéressée) ; le niveau des travaux produits par Sofia Kowaleskaïa par la suite, et en particulier un

EXERCICES : indications et propositions de solution

1 On remarque que 0 est adhérent à l'ensemble de définition de ces deux applications.

L'application φ n'a pas de limite en 0. Montrons ceci par l'absurde en supposant que φ ait une telle limite, que nous noterons ℓ.

Soit $\mathbf{n}$ un naturel ; notons $\mathbf{x_n}$ le réel $\dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\mathbf{n}\pi}$: on constate que $\varphi(\mathbf{x_n}) = 1$.

Soit η un réel strictement positif tel que si $\mathbf{x} \in]-\eta, \eta[$ alors $|\ell - \varphi(\mathbf{x})| < 1$ (*pourquoi existe-t-il un tel réel ?*) ; on peut trouver un naturel $\mathbf{p}$ tel que $\mathbf{x_p} \in]-\eta, \eta[$; on en déduit que $|\ell - 1| < 1$; on démontre de façon analogue que $|\ell - (-1)| < 1$ (il suffit de remplacer $\frac{\pi}{2}$ par $\frac{3\pi}{2}$). Il en résulte que

$$2 = |(1 - \ell) + (\ell - (-1))| \leq |\ell - 1| + |(-1) - \ell| < 1 + 1,$$

et donc que $2 < 2$, d'où la contradiction.

Par contre, ψ a une limite en 0. En effet, ψ admet la limite 0 en 0 : soit ε un réel strictement positif ; si $\mathbf{x}$ est un réel non nul tel que $|0 - \mathbf{x}| < \varepsilon$, c'est-à-dire tel que $|\mathbf{x}| < \varepsilon$, alors $|0 - \psi(\mathbf{x})| = |\psi(\mathbf{x})| \leq |\mathbf{x}| < \varepsilon$ car $|\mathbf{sin}\, \frac{1}{\mathbf{x}}| < 1$.

2 Démontrons-le par l'absurde. Supposons donc qu'il existe un élément $\mathbf{x}$ de $[\mathbf{a}, \mathbf{b}[$ tel que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) > \ell$; soit $\mathbf{x}$ un tel réel.

Soit α un réel strictement positif tel que $\ell + \alpha < \mathbf{f}(\mathbf{x})$ (par exemple $\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \ell}{2}$) ; soit $\mathbf{I}$ un intervalle ouvert centré sur $\mathbf{b}$ tel que $\mathbf{f}([\mathbf{a}, \mathbf{b}[\cap \mathbf{I}) \subset]\ell - \alpha, \ell + \alpha[$ (un tel intervalle existe car $\mathbf{f}$ admet la limite ℓ en $\mathbf{b}$). L'ensemble $[\mathbf{x}, \mathbf{b}[\cap \mathbf{I}$ n'est pas vide (*précisez pourquoi*). Si $\mathbf{t} \in [\mathbf{x}, \mathbf{b}[\cap \mathbf{I}$ alors $\mathbf{f}(\mathbf{t}) \in]\ell - \alpha, \ell + \alpha[$ et donc $\mathbf{f}(\mathbf{t}) < \ell + \alpha$; d'autre part, $\mathbf{x} \leq \mathbf{t} < \mathbf{b}$ et $\mathbf{f}$ est croissante, donc $\mathbf{f}(\mathbf{t}) \geq \mathbf{f}(\mathbf{x}) > \ell + \alpha$; d'où la contradiction.

3 Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ des réels tels que $\mathbf{a} < \mathbf{b}$. Soit $\mathbf{f}$ une application croissante et majorée de $]\mathbf{a}, \mathbf{b}[$ vers $\mathbb{R}$. Puisque $\mathbf{f}(]\mathbf{a}, \mathbf{b}[)$ est un ensemble de réels non vide et majoré, il a une borne supérieure. Notons-la ℓ.

Montrons que ℓ est limite de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{b}$. Soit ε un réel strictement positif ; il existe (au moins) un élément de $\mathbf{f}(]\mathbf{a}, \mathbf{b}[)$ dans $]\ell - \varepsilon, \ell]$ sinon ℓ ne serait pas le plus petit des majorants de $\mathbf{f}(]\mathbf{a}, \mathbf{b}[)$. Soit $\mathbf{y}$ un élément de $\mathbf{f}(]\mathbf{a}, \mathbf{b}[) \cap]\ell - \varepsilon, \ell]$; soit $\mathbf{x}$ un antécédent de $\mathbf{y}$; on remarque que $\mathbf{a} < \mathbf{x} < \mathbf{b}$. Notons α le réel strictement positif $\mathbf{b} - \mathbf{x}$.

Puisque $\mathbf{f}$ est croissante, si $\mathbf{t} \in]\mathbf{x}, \mathbf{b}[$ alors $\mathbf{f}(\mathbf{t}) \geq \mathbf{y}$, donc

$$\mathbf{f}(]\mathbf{b} - \alpha, \mathbf{b} + \alpha[\cap]\mathbf{a}, \mathbf{b}[) = \mathbf{f}(]\mathbf{x}, \mathbf{b}[) \subset]\ell - \varepsilon, \ell] \subset]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon] :$$

étant donné ε réel strictement positif donné, on peut trouver un réel strictement positif η (à savoir α) tel que $\mathbf{f}(]\mathbf{b} - \eta, \mathbf{b} + \eta[\cap]\mathbf{a}, \mathbf{b}[) \subset]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$, donc ℓ est bien limite de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{b}$.

Les autres cas se traitent de façon analogue.

4 $\forall_{\mathbb{R}_+^*} \varepsilon,\ \exists_{\mathbb{R}_+^*} \eta,\ \forall_{\mathbf{E}} \mathbf{x},\ |\mathbf{a} - \mathbf{x}| < \eta \Rightarrow |\mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})| < \varepsilon.$

CHAPITRE 8

FONCTIONS TRANSCENDANTES

On appelle transcendantes les fonctions qui ne peuvent pas s'exprimer à l'aide de l'addition, de la soustraction, de la multiplication, de la division et des racines $\mathbf{n}$-ième (si $\mathbf{n}$ est un naturel non nul). On ne démontrera pas ici que les fonctions présentées dans ce chapitre sont transcendantes.
Bien que les deux premiers paragraphes soient essentiellement des rappels, plus ou moins développés, il convient de les étudier avec soin : les fonctions concernées jouent un rôle fondamental, et **il faut absolument se familiariser avec leurs propriétés**.

8.1 - LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

L'application $\mathbf{x} \mapsto \frac{1}{\mathbf{x}}$ est définie, continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ Suivant la **PROPRIÉTÉ 7.K** du chapitre précédent que nous avons admise (page 142), cette application a des primitives sur cet intervalle ; et suivant la **PROPRIÉTÉ 7.J** (page 141) il existe une unique primitive de cette application qui s'annule en 1. En l'honneur de Napier (en français : Neper), on appelle ***logarithme népérien*** et on note **ln** cette primitive :

$$\mathbf{ln}(1) = 0, \text{ et si } \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^* \text{ alors } (\mathbf{ln}(\mathbf{x}))' = \frac{1}{\mathbf{x}}.$$

L'application logarithme est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, sa dérivée est $\mathbf{x} \mapsto \frac{1}{\mathbf{x}}$.

1 *Vérifiez que* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{ln}(-\mathbf{x})$ *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}_-^*$, *et que sa dérivée est* $\mathbf{x} \mapsto \frac{1}{\mathbf{x}}$.

L'application logarithme, ayant une dérivée strictement positive, est strictement croissante.

Soit $\mathbf{a}$ un réel strictement positif ; l'application $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{ln}(\mathbf{a}\mathbf{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et a la même application dérivée que **ln** (*le vérifier, en remarquant que cette application est la composée des applications* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{ax}$ *et* **ln**), donc ces deux applications sont des primitives d'une même application sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est un intervalle ouvert ; notons $\mathbf{k}$ le réel tel que $\mathbf{ln}(\mathbf{ax}) = \mathbf{ln}(\mathbf{x}) + \mathbf{k}$ si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^*$ Cette relation est vérifiée en particulier si $\mathbf{x} = 1$, donc $\mathbf{k} = \mathbf{ln}(\mathbf{a})$.

9.3.3 - QUOTIENT

PROPRIÉTÉ 9.D Soient $\mathbf{r}$ un réel et $\mathbf{n}$ un naturel. Soient $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ admettant un développement limité d'ordre $\mathbf{n}$ en $\mathbf{r}$.

Si $\mathbf{g}$ admet une limite non nulle en $\mathbf{r}$, la fonction $\dfrac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}$ admet un développement limité d'ordre $\mathbf{n}$ en $\mathbf{r}$.

Nous ne démontrerons pas ce théorème ; nous nous contenterons de montrer sur un exemple la technique à suivre dans le cas où $\mathbf{r} = 0$.
Comme on le verra plus loin, **cos** et **sin** admettent des développements limités à tous les ordres et en tout point. Donnons ici les parties régulières de ces développements en 0 à l'ordre 3, ainsi que celle de $\mathbf{x} \mapsto 2 + \mathbf{sin\,x}$:

$$\mathbf{cos\,x} :_3 1 - \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 \quad ; \quad \mathbf{sin\,x} :_3 \mathbf{x} - \frac{1}{6}\mathbf{x}^3 \quad ; \quad 2 + \mathbf{sin\,x} :_3 2 + \mathbf{x} - \frac{1}{6}\mathbf{x}^3.$$

On aura bien remarqué le signe conventionnel "$:_3$" (qui n'est pas un signe universel) n'est pas le signe "=".
On pourra disposer les données et les calculs comme ci-dessous (on dira qu'on a effectué une ***division puissance croissante***).

$$
\begin{array}{cl|l}
\text{❶} & 1 \qquad\qquad -\frac{1}{2}\mathbf{x}^2 & 2 + \mathbf{x} - \frac{1}{6}\mathbf{x}^3 \quad \longleftarrow \ \textbf{diviseur} \\
\cline{3-3}
\text{❷} & \underline{1 + \frac{1}{2}\mathbf{x} \qquad\qquad\qquad -\frac{1}{12}\mathbf{x}^3} & \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\mathbf{x} - \frac{1}{8}\mathbf{x}^2 + \frac{5}{48}\mathbf{x}^3 \\
\text{❸} & \quad -\frac{1}{2}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 + \frac{1}{12}\mathbf{x}^3 & \uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow \\
\text{❹} & \quad \underline{-\frac{1}{2}\mathbf{x} - \frac{1}{4}\mathbf{x}^2 \qquad\qquad} & ① \qquad ② \qquad ③ \qquad ④ \\
\text{❺} & \qquad\qquad -\frac{1}{4}\mathbf{x}^2 + \frac{1}{12}\mathbf{x}^3 & \\
\text{❻} & \qquad\qquad \underline{\frac{1}{4}\mathbf{x}^2 - \frac{1}{8}\mathbf{x}^3} & \\
\text{❼} & \qquad\qquad\qquad \frac{5}{24}\mathbf{x}^3 &
\end{array}
$$

- ligne ❶ : dividende ;
- ① : quotient du premier terme de la ligne ❶ par **2**, le terme constant du diviseur ;
- ligne ❷ : produit de ① par le diviseur ;
- ligne ❸ : différence de ❶ et de ❷ ;

Le lecteur est invité à traiter le cas où $\mathbf{dim}(\mathbf{E} \cap \mathbf{F}) = 0$ *(ce qui se fait très simplement, en prenant modèle sur ce qui a été fait dans la démonstration ci-dessus).* ◢

On n'a pas défini ici la base d'un espace vectoriel de dimension 0, l'objet pouvant paraître étrange ; mais l'on paye cette simplification par l'apparition de cas particuliers, comme dans cette démonstration.

16 *Montrez que si* $\mathbf{W}_1$ *et* $\mathbf{W}_2$ *sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel* $\mathbf{V}$ *de dimension finie,*

$$\mathbf{dim}(\mathbf{V}) = \mathbf{dim}(\mathbf{W}_1) + \mathbf{dim}(\mathbf{W}_2).$$

17 *Donnez une base du sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *engendré par les vecteurs*

$$(-2;2;0;-1),\ (4;-1;2;3) \text{ et } (0;3;2;1).$$

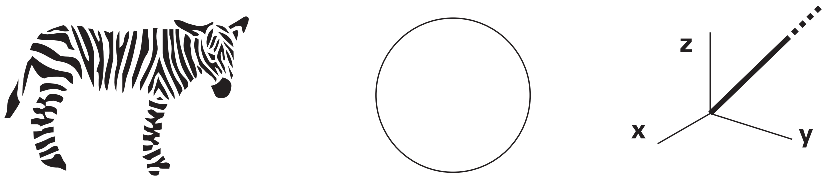
On notera $\mathbf{E}$ *ce sous-espace vectoriel.*
Donnez, chacun par une base, deux sous-espaces vectoriels $\mathbf{F}$ *et* $\mathbf{G}$ *de* $\mathbb{R}^4$ *supplémentaires de* $\mathbf{E}$.

Un espace (ou un sous-espace) vectoriel de dimension 1 est appelé une ***droite vectorielle***. Pour la dimension 2, on parlera de ***plan vectoriel***.

Si un sous-espace vectoriel est supplémentaire d'une droite vectorielle, on dit que c'est un ***hyperplan vectoriel***. En particulier, dans un espace vectoriel de dimension finie $\mathbf{n}$, les hyperplans vectoriels sont les sous-espaces vectoriels de dimension $\mathbf{n}-1$. Ainsi, dans un espace vectoriel de dimension 3 les hyperplans vectoriels sont les plans vectoriels.

18 *Qu'en est-il dans les espaces vectoriels de dimension* 2 *? De dimension* 1 *?*

19 *Pour chacun des trois objets dessinés ci-dessous, donnez une raison montrant qu'il n'est* ***pas*** *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.



13.9 - LES MATRICES

Soient $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ des ensembles ; on appelle ***matrices*** sur $\mathbf{I} \times \mathbf{J}$ à valeurs dans $\mathbf{K}$ les applications de $\mathbf{I} \times \mathbf{J}$ vers $\mathbf{K}$ (autrement dit, ce sont les éléments de $\mathbf{K}^{\mathbf{I} \times \mathbf{J}}$).