MATHÉMATIQUES
POUR L'ÉTUDIANT SCIENTIFIQUE

TOME 2

Philippe-Jacques HAUG

EDP SCIENCES

7, avenue du Hoggar
Parc d'Activité de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Grenoble Sciences

Grenoble Sciences poursuit un triple objectif :

- réaliser des ouvrages correspondant à un projet clairement défini, sans contrainte de mode ou de programme,
- garantir les qualités scientifique et pédagogique des ouvrages retenus,
- proposer des ouvrages à un prix accessible au public le plus large possible.

Chaque projet est sélectionné au niveau de Grenoble Sciences avec le concours de referees anonymes. Puis les auteurs travaillent pendant une année (en moyenne) avec les membres d'un comité de lecture interactif, dont les noms apparaissent au début de l'ouvrage. Celui-ci est ensuite publié chez l'éditeur le plus adapté.

(Contact : Tél. : (33)4 76 51 46 95, e-mail : Nicole.Sauval@ujf-grenoble.fr)

Deux collections existent chez EDP Sciences :

- la ***Collection Grenoble Sciences***, connue pour son originalité de projets et sa qualité
- ***Grenoble Sciences - Rencontres Scientifiques***, collection présentant des thèmes de recherche d'actualité, traités par des scientifiques de premier plan issus de disciplines différentes.

Directeur scientifique de Grenoble Sciences
Jean BORNAREL, Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1

Comité de lecture pour "Mathématiques pour l'étudiant scientifique"

- ◆ **Denise GRENIER**, Maître de conférences à l'Université Joseph Fourier - Grenoble
- ◆ **Jean BORNAREL**, Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble
- ◆ **François BRUT**, Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble

et

- ◆ **Valérie-Anne MARTY**
- ◆ **Pierre GIRAUD-BIT**
- ◆ **Laurent TAMANTINI**

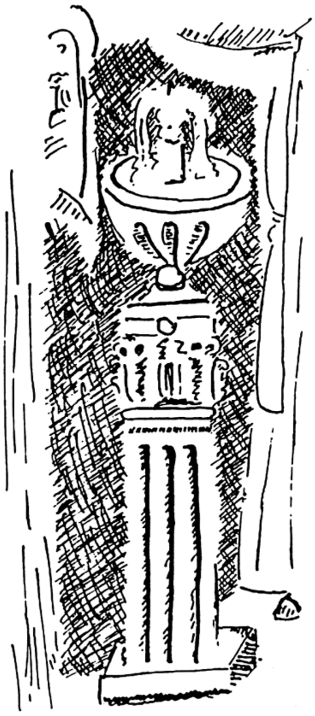
Grenoble Sciences reçoit le soutien du **Ministère de l'Éducation nationale,** du **Ministère de la Recherche**, de la **Région Rhône-Alpes**, du **Conseil général de l'Isère** et de la **Ville de Grenoble**.

Réalisation et mise en pages : Centre technique Grenoble Sciences
Illustration de couverture par Alice Giraud

ISBN 2-86883-495-7

EXTRAITS

Les mosaïques qui ornent la basilique de San Vitale à Ravenne (Italie) ont été réalisées au milieu du VI^e siècle, à un moment où les procédés de la perspective étaient inconnus dans le monde entier. Pourtant, on se convainc vite que ces mosaïques sont tout à fait efficaces pour le but évident qu'elles poursuivaient (la glorification du pouvoir impérial). Je propose seulement d'examiner la fontaine (reproduite ci-contre) qui se trouve dans la partie gauche de la mosaïque consacrée à l'impératrice Theodora.

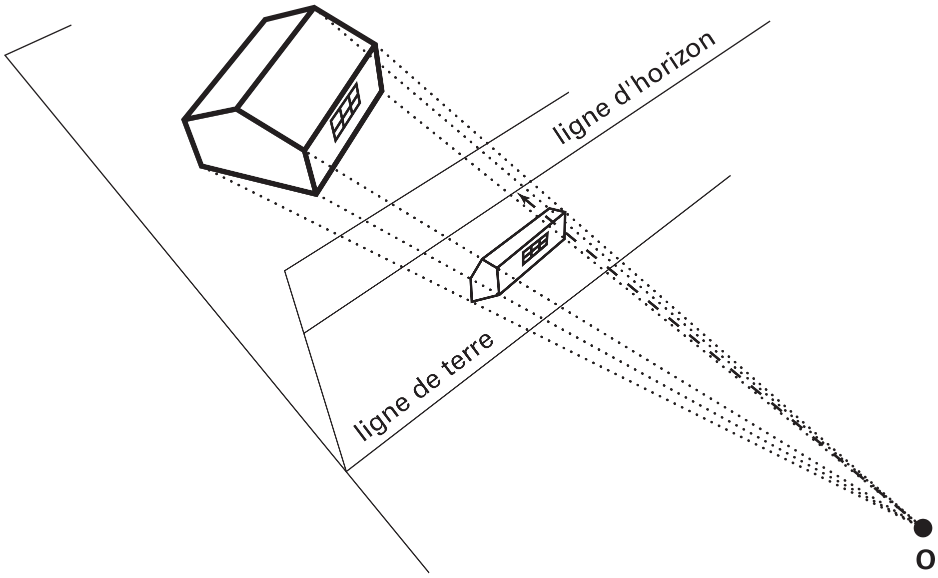


Ce dessin ne ressemble pas du tout à une photographie ; et pourtant, l'image nous montre sous le meilleur aspect chaque détail : la vasque et le pied nous sont montrés comme si nous étions par-dessus, la colonne et le jet d'eau approximativement comme si nous étions à leur hauteur. Le cubisme, pratiqué au début du XIX^e siècle par des peintres qui n'ignoraient évidemment rien des techniques de la perspective, a repris ce procédé qui permet de montrer chaque partie d'un objet sous l'angle le plus intéressant.

▲ Pour projeter $\mathbb{R}^3$ sur un plan on choisit une direction de droite δ (pour les projections parallèles) ou un point **O** (pour les projections centrales), et un plan Π. A chaque point **M** de $\mathbb{R}^3$ qu'on veut représenter on associe la droite qui passe par **M**, de direction δ ou qui passe par **O** suivant les cas. L'image de **M** est l'intersection de cette droite et du plan Π.

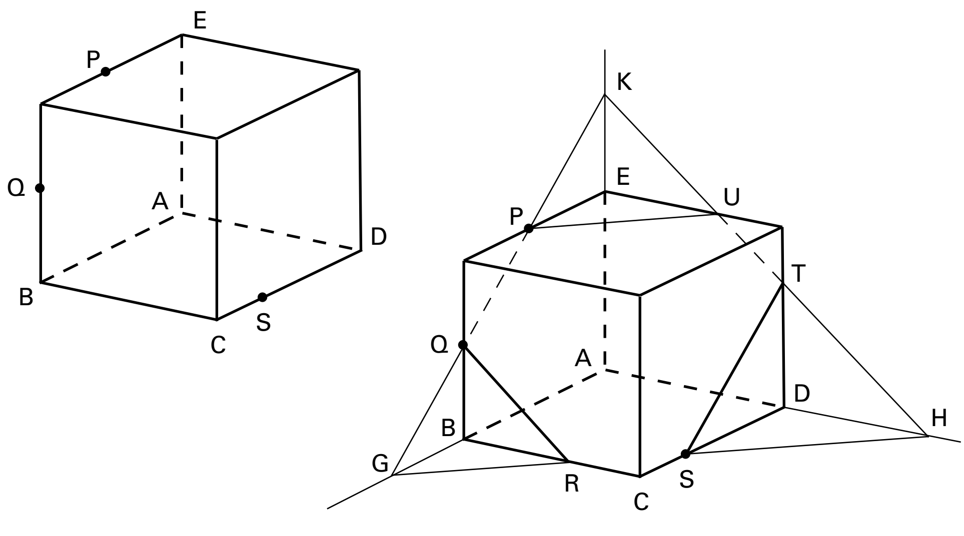
Les deux images suivantes illustrent ce qu'est la projection conique.

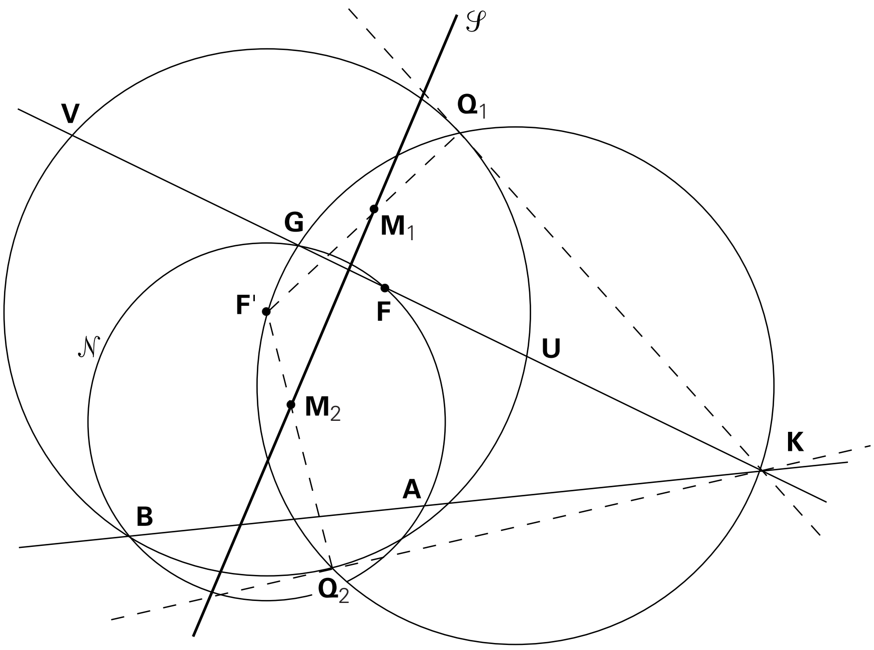
Albrecht Dürer : méthode pour dessiner un nu (gravure sur bois)
(cliché Bibliothèque nationale de France, Paris)



Ces projections, centrales ou parallèles, ont des propriétés communes qu'on peut facilement vérifier :

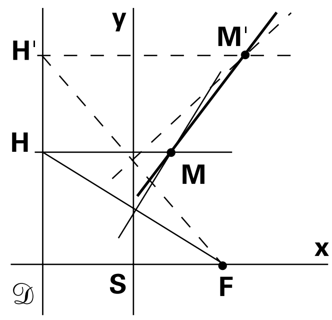
- l'image d'une droite est en général une droite – et donc trois points alignés ont des images alignées ; toutefois, les droites qui appartiennent à la direction de la projection (pour les projections parallèles), ou qui passent par le centre de la projection (pour les projections centrales), ont pour image un point – et dans ce dernier cas, les droites qui passent par le centre de projection et qui sont parallèles au plan sur lequel on projette n'ont aucune image ;
- si deux segments sont dans un même plan parallèle au plan de projection, leurs images sont des segments qui leur sont proportionnels – et donc dans ce cas l'angle des images est égal à celui des segments donnés.





18.3 - TANGENTES À UNE CONIQUE

18.3.1 - PARABOLE



Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer **F** et de directrice $\mathcal{D}$; notons **S** son sommet. Définissons (partiellement) un repère orthonormé en choisissant **S** comme origine, l'axe de la parabole comme droite des abscisses et la droite perpendiculaire passant par **S** comme droite des ordonnées, et en décidant que **F** a une abscisse positive.
Notons **p** le réel strictement positif 2**SF** (avec cette notation, **F** a pour abscisse $\frac{\mathbf{p}}{2}$).

Soit **M** un point de $\mathcal{P}$; notons **x** et **y** ses coordonnées dans le repère choisi. Notons **H** l'intersection de $\mathcal{D}$ et de la parallèle à l'axe de $\mathcal{P}$ qui passe par **M**. Comme tous les points de la droite $\mathcal{D}$, le point **H** a pour abscisse $-\frac{\mathbf{p}}{2}$; son ordonnée est évidemment **y**.

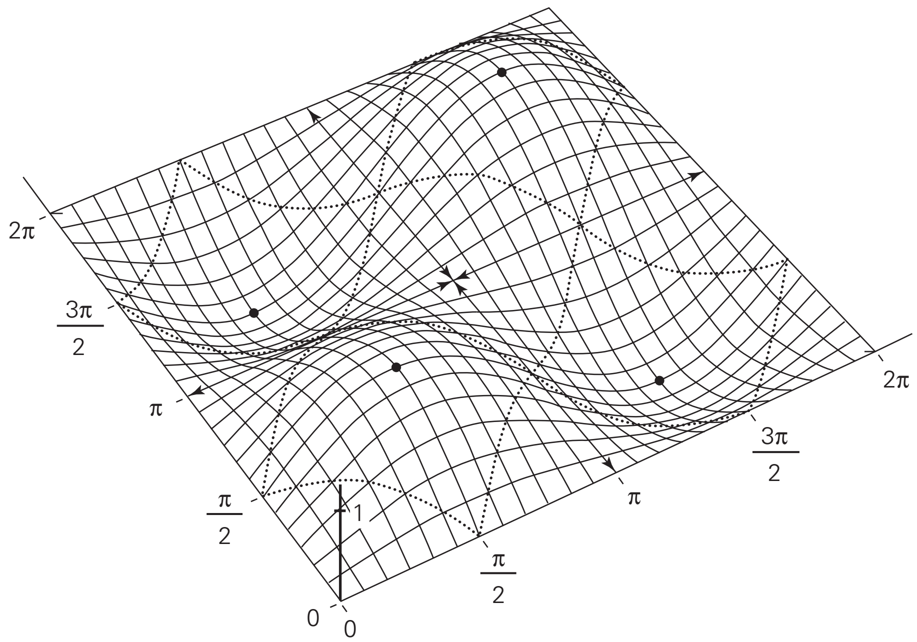
Par définition, **MF** = **MH**. Cette égalité est équivalente aux égalités suivantes :

$$\mathbf{MF}^2 = \mathbf{MH}^2 \quad ; \quad (\mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{2})^2 + \mathbf{y}^2 = (\mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{2})^2 \quad ; \quad \mathbf{y}^2 = 2\mathbf{px}.$$

Le gradient de $\mathbf{f}$ est nul

- aux points de la forme $(\mathbf{a}\pi, \mathbf{b}\pi)$ où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont des entiers, et en ces points la surface a un col car $\mathbf{q}^2 - \mathbf{p}\,\mathbf{r} = 1 > 0$,
- et aux points de la forme $(\frac{\pi}{2} + \mathbf{a}\pi, \frac{\pi}{2} + \mathbf{b}\pi)$ où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont des entiers ; dans ce dernier cas, la surface a un extremum local (qui se trouve être un extremum global) car $\mathbf{q}^2 - \mathbf{pr} = -1 < 0$; cet extremum est un maximum si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ ont la même parité ($\mathbf{p} < 0$), et un minimum sinon.

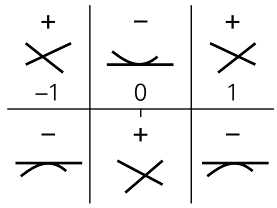
Les intersections de la surface avec les plans verticaux d'équation $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \frac{\pi}{2} + \mathbf{a}\pi$ et les plans verticaux d'équations $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \frac{\pi}{2} + \mathbf{b}\pi$ en $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont des entiers (intersections dessinées ici en pointillé) délimitent les zones où la surface est en dessous de son plan tangent (celles qui contiennent un maximum), celles où elle est au-dessus de son plan tangent (celles qui contiennent un minimum), et celles où elle traverse son plan tangent (celles qui contiennent un col).
On peut montrer que sur les courbes qui délimitent ces régions la surface traverse son plan tangent.



21 L'application $\mathbf{f}$ est différentiable (**PROPRIÉTÉ 20.P**). Si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont des réels,

$$\mathbf{f}_1'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2\mathbf{x}}{1 + \mathbf{x}^2} \text{ et } \mathbf{f}_2'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^2.$$

Avec les notations usuelles, $\mathbf{q}^2 - \mathbf{pr} = \dfrac{4(\mathbf{x}^2 - 1)\mathbf{y}}{(1 + \mathbf{x}^2)^2}$; on a indiqué sur le schéma six régions où $\mathbf{q}^2 - \mathbf{pr} \neq 0$ et où $\mathbf{q}^2 - \mathbf{pr}$ a un signe constant ; pour chacune de ces régions, on a précisé le signe de $\mathbf{q}^2 - \mathbf{pr}$ et la position de la surface par rapport à son plan tangent.



ANNEXE 1

MÉTHODES DE RAISONNEMENT

Au gré des occasions qu'offrait telle ou telle démonstration, des éléments de logique, des remarques sur la bonne conduite des raisonnements et sur l'usage correct des écritures en mathématiques. On trouvera ici une reprise, organisée et condensée, de ce qui a été précédemment proposé de façon désordonnée.

Même rassemblées et ordonnées, ces remarques ne forment en aucun cas un cours de logique – qui n'aurait d'ailleurs pas sa place ici. Leur but est de rendre explicites les méthodes de raisonnement et les utilisations de la logique les plus couramment pratiquées en mathématiques, et aussi de rappeler des règles essentielles qu'il est bon de respecter si l'on veut produire un texte mathématique cohérent et lisible.

On trouvera ces remarques rassemblées en trois paragraphes ; en regard du texte se trouvent indiquées les pages, ainsi que le tome, où l'on peut retrouver les mêmes remarques, éventuellement un peu plus développées (par exemple **49/1** *désigne la page 49 du tome 1) ; s'y reporter permettra également de retrouver des exemples illustrant ces remarques.*

A - LOGIQUE DES PROPOSITIONS

La logique des propositions considère les propositions (que, dans ce cadre, nous appelons encore indifféremment relations, phrases, ...) comme des touts, sans se préoccuper du détail de leur contenu. *49/1*

Des propositions nouvelles peuvent être construites à partir de propositions données, grâce aux connecteurs. Voici les connecteurs qui sont utilisés en mathématiques.

non (négation) **et** (conjonction) **ou** (disjonction)

$\Rightarrow$ (implication) $\Leftrightarrow$ (équivalence)

On rencontre également l'implication réciproque ($\Leftarrow$).

Les tables de vérité définissent le sens de ces connecteurs ; par exemple, si $\mathcal{P}$ est une proposition fausse et si $\mathcal{Q}$ est une proposition vraie, la table de vérité de la conjonction indique que $\mathcal{P}$ **et** $\mathcal{Q}$ est une proposition fausse. *49/1*