

LA MÉCANIQUE QUANTIQUE
PROBLÈMES RÉSOLUS
TOME 2

Victor Mikhailovich GALITSKY
Boris Mikhailovich KARNAKOV
Vladimir Il'yich KOGAN



17, avenue du Hoggar
Parc d'Activité de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Grenoble Sciences

Grenoble Sciences poursuit un triple objectif :

- réaliser des ouvrages correspondant à un projet clairement défini, sans contrainte de mode ou de programme,
- garantir les qualités scientifique et pédagogique des ouvrages retenus,
- proposer des ouvrages à un prix accessible au public le plus large possible.

Chaque projet est sélectionné au niveau de Grenoble Sciences avec le concours de referees anonymes. Puis les auteurs travaillent pendant une année (en moyenne) avec les membres d'un comité de lecture interactif, dont les noms apparaissent au début de l'ouvrage. Celui-ci est ensuite publié chez l'éditeur le plus adapté.

(Contact : Tél. : (33)4 76 51 46 95 - E-mail : Grenoble.Sciences@ujf-grenoble.fr)

Deux collections existent chez EDP Sciences :

- la *Collection Grenoble Sciences*, connue pour son originalité de projets et sa qualité
- *Grenoble Sciences - Rencontres Scientifiques*, collection présentant des thèmes de recherche d'actualité, traités par des scientifiques de premier plan issus de disciplines différentes.

Directeur scientifique de Grenoble Sciences

Jean BORNAREL, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1

Traduction et Comité de lecture pour "La mécanique quantique"

Cet ouvrage est le fruit de la coopération établie entre les éditions MIR et Grenoble Sciences. La version française a été améliorée et remaniée par Laurent DEROME et Konstantin PROTASSOV, Maîtres de conférences à l'Université Joseph Fourier (UJF), avec les suggestions et relectures d'Elie BELORIZKY et Jean-Jacques BENAYOUN, Professeurs à l'UJF.

Grenoble Sciences reçoit le soutien
du **Ministère de la Jeunesse, de l'Éducation nationale et de la Recherche**,
de la **Région Rhône-Alpes**, du **Conseil général de l'Isère**
et de la **Ville de Grenoble**.

Illustration de couverture : **Alice GIRAUD**

ISBN 2-86883-586-4

© EDP Sciences, 2003

EXTRAITS

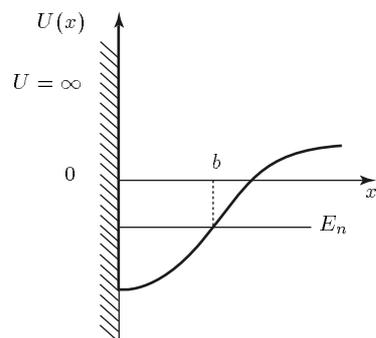


Figure 1

9.6. L'énergie potentielle d'une particule au voisinage du point x_0 est de la forme ($\nu > 0$)

$$U(x) \approx \pm \alpha |x - x_0|^{-\nu}.$$

Pour quelles valeurs du paramètre ν peut-on utiliser l'approximation quasi-classique au voisinage de ce point ? Qu'en est-il pour $\nu = 2$?

9.7. Pour une particule se trouvant dans le potentiel central $U(r) = -\alpha r^{-\nu}$, $\alpha > 0$, $\nu > 0$, établir dans quel domaine de l'espace l'approximation quasi-classique est applicable pour une particule dans l'état s d'énergie $E = 0$.

9.8. En utilisant l'approximation quasi-classique, chercher les niveaux élevés du spectre discret (c'est-à-dire les niveaux d'énergie $E_n \rightarrow 0$) d'une particule dans un potentiel $U(x)$ de la forme

$$U(x) = \begin{cases} -\alpha/x^2, & x > a \quad (a > 0), \\ \infty, & x < a. \end{cases}$$

Indiquer les conditions de validité du résultat obtenu.

9.9. Obtenir dans l'approximation quasi-classique les fonctions d'onde et les niveaux d'énergie des états s d'une particule dans le potentiel coulombien $U(r) = -\alpha/r$. Comparer le résultat obtenu à la solution exacte du problème.

9.10. Généraliser le résultat du problème précédent pour un potentiel central de la forme $U(r) = -\alpha/r^\nu$; $0 < \nu < 2$.

9.11. Généraliser le résultat du problème 9.9 pour les états stationnaires d'une particule ayant un moment cinétique non nul dans un potentiel coulombien.

9.12. En utilisant l'approximation quasi-classique, chercher les valeurs des paramètres du potentiel

$$U(x) = -\frac{U_0 a^4}{(x^2 + a^2)^2},$$

pour lesquels il y a apparition d'un nouvel état lié. Indiquer les conditions de validité du résultat obtenu.

9.13. Même question que dans le problème précédent, mais pour le potentiel

$$U(x) = -\frac{U_0 a^4}{x^4 + a^4}.$$

si $\sqrt{m\alpha} \gg \hbar$ l'approximation quasi-classique est valable dans tout l'espace ; pour $\sqrt{m\alpha} \lesssim \hbar$ l'approche quasi-classique n'est, en général, pas applicable.

9.8. Ici, l'approche quasi classique ne peut être utilisée que si $\sqrt{m\alpha} \gg \hbar$ (comparer à 9.7). Si cette condition est satisfaite, on peut appliquer l'approximation quasi-classique pour tout $x \geq a$ (pour $x < a$, $\Psi \equiv 0$), à l'exception d'une bande étroite au voisinage du point de rebroussement droit $x = b = \sqrt{\alpha/|E|}$. Les niveaux d'énergie peuvent être déterminés à l'aide de la règle de quantification établie dans le problème 9.2, c'est-à-dire

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m \left[-|E_n| + \frac{\alpha}{x^2} \right]} dx = \pi(n + 3/4), \quad (E_n = -|E_n| < 0). \quad (1)$$

Après le changement de variable $z = \sqrt{1 - |E_n|x^2/\alpha}$, l'intégrale de cette expression se calcule sans peine, et elle prend la forme

$$\sqrt{\frac{2m\alpha}{\hbar^2}} \left(-z_0 + \frac{1}{2} \ln \frac{1+z_0}{1-z_0} \right) = \pi(n + 3/4), \quad (2)$$

où

$$z_0 = \sqrt{1 - a^2|E_n|/\alpha}. \quad (3)$$

On ne peut obtenir, à partir des relations (2) et (3), l'expression explicite de $|E_n|$ que pour $|E_n| \ll \alpha/a^2$ et $|E_n| \approx \alpha/a^2$. Dans le premier cas (niveaux élevés du spectre) on obtient après un développement limité ($|E_n|a^2/\alpha \ll 1$) :

$$\sqrt{\frac{2m\alpha}{\hbar^2}} \left(-1 + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha}{a^2|E_n|} + O\left(\frac{a^2|E_n|}{\alpha}\right) \right) = \pi(n + 3/4),$$

d'où

$$E_n \approx -\frac{4\alpha}{a^2} \exp \left\{ -\frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m\alpha}} (n + 3/4) - 2 \right\}. \quad (4)$$

Il s'ensuit de l'expression (4) que la distance entre les niveaux élevés du spectre (dont le nombre est infiniment grand) diminue de façon exponentielle avec n , et la densité d'états du spectre discret (comparer à 9.5) pour $|E| \rightarrow 0$ croît comme $|E|^{-1}$.

On obtient la forme explicite de la fonction d'onde $\Psi_n(x)$ en utilisant les expressions générales des fonctions d'onde à droite et à gauche du point de rebroussement droit, établies dans 9.2, et en procédant au changement de variable indiqué plus haut pour le calcul de l'intégrale $\int p(x)dx$.

9.9. Cherchons dans l'approximation quasi-classique la forme de la fonction $\chi(r)$ liée à la fonction d'onde $\Psi_{n,lm}$ par la relation $\chi = r\Psi_{n,00}$. Cette fonction satisfait à l'équation de Schrödinger unidimensionnelle avec le potentiel $U = -\alpha/r$ et la condition limite $\chi(0) = 0$. Les points de rebroussement sont $r = a = 0$ et $r = b = \alpha/|E|$.

11.5 PHÉNOMÈNES NON STATIONNAIRES DANS LES ATOMES ET LES MOLÉCULES

11.74. L'atome d'hydrogène se trouve dans son état fondamental. Le noyau de l'atome est le triton, isotope superlourd de l'hydrogène. Par suite de la désintégration β le tritium se transforme en hélium :



Chercher la probabilité pour que l'ion d'hélium formé du fait de la désintégration soit dans son état fondamental.

En calculant le phénomène, tenir compte du fait que la variation de la charge du noyau est l'effet dominant par rapport aux effets de recul du noyau (voir à ce propos 11.77 et 11.78) et de l'interaction de l'électron de désintégration β avec l'électron atomique (la vitesse de l'électron de désintégration β est beaucoup plus grande que celle de l'électron de l'atome : $v \gtrsim 10v_{\text{at}}$).

11.75. Dans les conditions du problème précédent, chercher les probabilités d'excitation des différents états de l'ion d'hélium (atome hydrogénoïde avec $Z = 2$) avec le nombre quantique principal $n = 2$.

11.76. Dans les conditions du problème 11.74, chercher la valeur moyenne de l'énergie acquise par l'électron atomique à la suite de la désintégration β du noyau.

11.77. Le noyau d'un atome, dans l'état stationnaire Ψ_0 , subit un choc brusque de durée τ et, par conséquent, acquiert une vitesse \mathbf{v} (par exemple, du fait du recul dû à l'émission d'un quantum γ par le noyau excité).

En supposant réalisées les inégalités $\tau \ll T$ et $\tau \ll a/v$, où T et a sont les ordres de grandeurs des périodes électroniques et des dimensions de l'enveloppe électronique respectivement, exprimer sous forme générale la probabilité de transition de l'atome dans l'état Ψ_n après cette "secousse".

11.78. En utilisant le résultat obtenu dans le problème précédent, calculer la somme des probabilités totales d'excitation et d'ionisation de l'atome d'hydrogène (se trouvant initialement dans l'état fondamental) engendrées par une "secousse" brusque au cours de laquelle une impulsion \mathbf{P} est communiquée au noyau (proton). Indiquer les conditions de validité du résultat obtenu.

11.79. Généraliser le résultat du problème 11.77 au cas d'une molécule diatomique, c'est-à-dire obtenir l'expression générale de la probabilité de transition de la molécule de l'état stationnaire Ψ_0 à l'état Ψ_n à la suite d'une "secousse" brusque au cours de laquelle est communiquée une impulsion \mathbf{P} à l'un des noyaux de la molécule.

Les valeurs propres de l'opérateur \widehat{V} définissent les déplacements énergétiques du niveau fondamental sous l'influence de l'interaction étudiée :

$$E_{\text{HFS}} = \frac{4\pi\epsilon\hbar\mu_0}{3mcI} |\Psi_0(0)|^2 \cdot \begin{cases} I, & \text{pour } J = I + 1/2, \\ -(I + 1), & \text{pour } J = I - 1/2 \end{cases}$$

(J est le moment total du système "noyau + électron", voir 3.34 du Tome I), autrement dit, le niveau initial se décompose en deux, en accord avec les valeurs possibles de $J = I \pm 1/2$ du moment total. La valeur de la décomposition hyperfine est

$$\Delta E_{\text{HFS}} = E_{\text{HFS}}(J = I + 1/2) - E_{\text{HFS}}(J = I - 1/2) = \frac{4\pi\epsilon\hbar\mu_0(2I + 1)}{3mcI} |\Psi_0(0)|^2. \quad (2)$$

Pour l'atome d'hydrogène on trouve une valeur numérique de la grandeur (2) : $\Delta\nu_{\text{HFS}} \equiv \Delta E_{\text{HFS}}/2\pi\hbar \approx 1420$ MHz en accord avec la valeur expérimentale.

La comparaison de la grandeur (2) avec la séparation de structure fine pour $n \sim 1$ (voir 11.1 du Tome I) donne $|\Delta E_{\text{HFS}}/\Delta E_{\text{FS}}| \sim m/m_p \sim 10^{-3}$, autrement dit, la décomposition hyperfine est beaucoup plus petite que celle de la structure fine.

11.5. En négligeant l'interaction entre les électrons $V = 1/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ (on utilise le système d'unités atomiques) la fonction d'onde de l'état fondamental de l'ion héliogénoïde est de la forme $\Psi_0^{(0)} = \Psi_0(r_1)\Psi_0(r_2)\frac{Z^3}{\pi}e^{-Z(r_1+r_2)}$. Elle correspond au niveau d'énergie $E_0^{(0)} = -Z^2$. La correction du premier ordre à l'énergie du niveau vaut

$$E_0^{(1)} = \int \frac{|\Psi_0^{(0)}|^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} dV_1 dV_2 = \frac{Z^6}{\pi^2} \int e^{-2Z(r_1+r_2)} \frac{r_1^2 r_2^2 dr_1 dr_2 d\Omega_1 d\Omega_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}} \quad (1)$$

Les intégrales de la forme

$$\int f(r_1)g(r_2) \frac{dr_1 dr_2 d\Omega_1 d\Omega_2 r_1^2 r_2^2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}} \quad (2)$$

se calculent sans peine de la façon suivante : pour un \mathbf{r}_1 fixé, intégrons par rapport aux variables angulaires \mathbf{r}_2 en choisissant la direction du vecteur \mathbf{r}_1 comme axe polaire ; alors,

$$\int \frac{d\Omega_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \int \frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta}} = \begin{cases} 4\pi/r_1, & r_1 > r_2, \\ 4\pi/r_2, & r_2 > r_1, \end{cases}$$

et l'expression (2) prend la forme

$$16\pi^2 \left\{ \int_0^\infty f(r_1)r_1 \int_0^{r_1} g(r_2)r_2^2 dr_2 dr_1 + \int_0^\infty g(r_2)r_2 \int_0^{r_2} f(r_1)r_1^2 dr_1 dr_2 \right\}.$$

Compte tenu de ce qui a été dit, on trouve de façon assez simple

$$\int \frac{e^{-\alpha r_1 - \beta r_2}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} dV_1 dV_2 = 16\pi^2 \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 + 6\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)^3}. \quad (3)$$

13.3 DIFFUSION DES PARTICULES RAPIDES (APPROXIMATION EIKONALE). DIFFUSION DES PARTICULES DOUÉES DE SPIN

13.37. Obtenir l'expression de l'amplitude de diffusion de particules rapides dans l'approximation eikonale ($q_{\perp} \approx q \approx k\theta$)

$$\begin{aligned} f(k, \theta) &= ik \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{im}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{\infty} U(\sqrt{\rho^2 + z^2}) dz \right] \right\} J_0(k\rho\theta) \rho d\rho \\ &= \frac{ik}{2\pi} \iint \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{im}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{\infty} U(\sqrt{\rho^2 + z^2}) dz \right] \right\} e^{-i\mathbf{q}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\rho}} d^2\rho \end{aligned}$$

directement à partir de son développement en ondes partielles.

Indiquer les conditions de validité du résultat obtenu.

13.38. Montrer que, dans l'approximation eikonale, l'amplitude de diffusion vérifie le théorème optique (comparer avec 13.10 et 13.11).

13.39. Montrer que la section efficace de diffusion totale de particules rapides $kR \gg 1$ (R étant le rayon de potentiel) dans le potentiel $U(r)$ peut être calculée à l'aide de la formule

$$\sigma(E) = 4\pi \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{m}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{\infty} U(\sqrt{\rho^2 + z^2}) dz \right] \right\} \rho d\rho$$

quelque soit la relation entre l'énergie des particules et l'énergie potentielle, ce qui signifie que pour que cette formule soit applicable, il n'est pas nécessaire que les conditions de validité de l'approximation eikonale soient remplies.

Appliquer le résultat obtenu au calcul de la section efficace de diffusion de la barrière de potentiel : $U = 0$ pour $r > R$ et $U = U_0$ pour $r < R$.

13.40. Chercher la section efficace de diffusion totale dans le potentiel $U(r) = \alpha/r^4$ ($\alpha > 0$) pour des particules d'énergie satisfaisant à la condition

$$\sqrt{\frac{mE}{\hbar^2}} \sqrt{\frac{m\alpha}{\hbar^2}} \gg 1.$$

13.41. Exprimer, dans l'approximation eikonale, l'amplitude de diffusion sur deux centres de forces situés à une distance \mathbf{a} l'un de l'autre, c'est-à-dire dans le potentiel $U(\mathbf{r}) = U_0(r) + U_0(|\mathbf{r} - \mathbf{a}|)$, en fonction de l'amplitude de diffusion f_0 sur un centre $U_0(r)$.

13.42. L'opérateur décrivant l'interaction d'une particule de spin $s = 1/2$ avec une particule sans spin est de la forme

$$\hat{U} = U_0(r) + U_1(r) \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{1}},$$

entre les sections efficaces de diffusion sur un potentiel sphérique en δ et sur une sphère dure au voisinage du niveau s quasi discret est égale à (fig. 11)

$$\Delta\sigma = \pi R^2 \frac{\Gamma_n^2}{n^2 \pi^2 [(E - E_{n,0})^2 + \Gamma_n^2/4]} > 0.$$

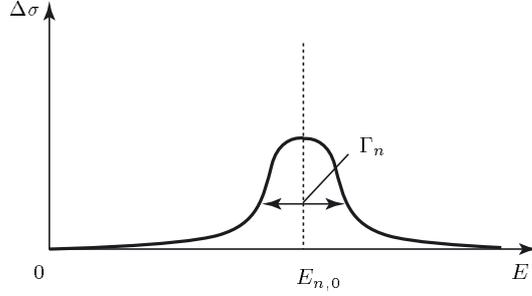


Figure 11

13.37. Avec $kR \gg 1$, $U_0 \ll E$, $\theta \ll 1$ (U_0 et R étant la grandeur caractéristique et le rayon du potentiel) dans l'expression

$$f(k, \theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l(k)} - 1) P_l(\cos \theta), \quad (1)$$

on peut utiliser l'expression quasi classique des déphasages [1]

$$\delta_l(k) \approx -\frac{m}{2k\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} U \left(\sqrt{z^2 + \frac{(l+1/2)^2}{k^2}} \right) dz \quad (2)$$

et la relation

$$P_l(\cos \theta) \approx J_0((l+1/2)\theta), \quad l \gg 1.$$

De plus, on peut remplacer la somme sur l par une intégrale, car la somme contient un très grand nombre de termes avec $l \sim kR$ qui varient peu dans le changement de l d'une unité. En effet,

$$J_0((l+1/2)\theta) \approx J_0(l\theta),$$

$$\Delta\delta_l \equiv \delta_{l+1} - \delta_l \sim \frac{\partial}{\partial l} \delta_l \sim \frac{m}{k\hbar^2} U_0 \frac{l}{Rk^2} \sim \frac{mU_0}{k^2\hbar^2}, \text{ c'est-à-dire que } |\Delta\delta_l| \ll 1.$$

Compte tenu de ce qui a été dit plus haut, avec le changement de variable $\rho = M/p = \hbar(l+1/2)/\hbar k = (l+1/2)/k$, on obtient à partir de l'expression (1) une représentation de l'amplitude de diffusion plus commode pour certaines applications :

$$f(k, \theta) = ik \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{im}{k\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} U(\sqrt{z^2 + \rho^2}) dz \right] \right\} J_0(k\rho\theta) \rho d\rho. \quad (3)$$

CHAPITRE 15

EQUATIONS D'ONDE RELATIVISTES

15.1 EQUATION DE KLEIN-GORDON

15.1. Montrer que si $\Psi^{(\pm)}(\mathbf{r}, t)$ est un paquet d'ondes composé de solutions particulières de l'équation de Klein-Gordon correspondant à l'énergie (ou à la pulsation) de signe déterminé (soit $\varepsilon \geq mc^2$, soit $\varepsilon \leq -mc^2$) ; alors, indépendamment de la forme concrète de cette superposition, la valeur de la grandeur

$$Q^{(\pm)} = \int \rho^{(\pm)}(\mathbf{r}, t) dV = \frac{i\hbar}{2mc^2} \int \left\{ \Psi^{(\pm)*} \frac{\partial \Psi^{(\pm)}}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^{(\pm)*}}{\partial t} \Psi^{(\pm)} \right\} dV$$

a un signe déterminé et est constante au cours du temps.

15.2. Montrer que l'équation de Klein-Gordon d'une particule libre est invariante par rapport à la transformation *antilinéaire* suivante

$$\Psi \rightarrow \Psi_c(\mathbf{r}, t) = \hat{C}\Psi(\mathbf{r}, t) \equiv \Psi^*(\mathbf{r}, t).$$

La transformation \hat{C} est la *conjugaison de charge*. Elle permet de passer à des solutions $\Psi^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ de l'équation ne présentant pas de sens physique direct ($\Psi^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ étant une superposition de solutions particulières correspondant formellement aux énergies négatives) aux fonctions $\Psi_c^{(+)} = \hat{C}\Psi^{(-)}$ qui correspondent aux énergies positives et qui s'interprètent comme des fonctions d'onde de l'*antiparticule*.

Montrer que si la fonction Ψ est une fonction propre d'un quelconque des opérateurs $\hat{\varepsilon} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $\hat{\mathbf{p}}$, \hat{l}_z , $\hat{\mathbf{I}}^2$, la fonction *conjuguée de charge* Ψ_c l'est également. Comment sont liées les valeurs propres des opérateurs associés à de telles fonctions ?

15.3.

a) Quelle forme prend l'équation de Klein-Gordon pour une particule chargée de spin nul dans un champ électromagnétique extérieur avec la transformation suivante

$$\Psi \rightarrow \Psi_c(\mathbf{r}, t) = \hat{C}\Psi(\mathbf{r}, t) \equiv \Psi^*(\mathbf{r}, t) ?$$

CHAPITRE 15

EQUATIONS D'ONDE RELATIVISTES

15.1. La solution générale de l'équation de Klein-Gordon peut être représentée sous la forme d'une superposition¹

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \Psi^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad \Psi^{(\pm)} = \int a^{(\pm)}(\mathbf{k}) \Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}(\mathbf{r}, t) d^3k, \quad (1)$$

de solutions particulières de cette équation formant un système complet² :

$$\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)} = e^{\pm i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(k)t)}, \quad \omega(k) = \sqrt{\mathbf{k}^2 c^2 + m^2 c^4 / \hbar^2} > 0. \quad (2)$$

La fonction $\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}$ décrit la particule avec l'impulsion $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ et l'énergie $\varepsilon = \hbar \omega \geq mc^2$. La fonction $\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}$ correspond formellement à l'énergie $\varepsilon' = -\hbar \omega \leq -mc^2$ et à l'impulsion $-\hbar \mathbf{k}$. Cette dernière solution, après avoir effectué l'opération de conjugaison de charge, constitue la fonction d'onde de l'antiparticule d'énergie $\varepsilon = \hbar \omega \geq mc^2$ et d'impulsion $\hbar \mathbf{k}$ (voir 15.2).

En nous limitant dans l'expression (1) aux superpositions $\Psi^{(+)}$, $\Psi^{(-)}$ ne contenant que les fonctions $\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}$ ou bien $\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}$ (soulignons encore une fois que seules ces solutions de l'équation de Klein-Gordon décrivent les états physiquement réalisables d'une particule libre sans spin !), portons ces fonctions $\Psi^{(\pm)}$ dans l'expression de Q donnée dans l'énoncé. Une intégration élémentaire donne

$$Q^{(\pm)} = \pm \frac{(2\pi)^3 \hbar}{mc^2} \int \omega(k) |a^{(\pm)}(\mathbf{k})|^2 d^3k, \quad (3)$$

où on a utilisé la relation

$$\int e^{\pm i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} d^3r = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

1 Il faut souligner que la solution générale (1) de l'équation de Klein-Gordon a un sens formel, vu qu'elle ne décrit aucun état à une particule. Les états à une particule ne sont décrits que par les fonctions $\Psi^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ et $\Psi^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ séparément (voir 15.2).

2 Faire attention à la notation utilisée pour la fonction d'onde $\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}$.

CHAPITRE 16

LOIS DE CONSERVATION

16.1 CINÉMATIQUE DES DÉSINTÉGRATIONS ET DES COLLISIONS

16.1. Une particule au repos A se désintègre en trois particules a : $A \rightarrow 3a$. Soit Q_0 l'énergie de désintégration¹.

Quelles sont les énergies cinétiques minimale et maximale des particules produites lors de cette désintégration ?

16.2. Une particule au repos A se désintègre en trois particules a : $A \rightarrow 3a$. L'énergie de désintégration vaut Q_0 . Comme $\sum_n \varepsilon_n = Q_0$ où ε_n est l'énergie cinétique de la $n^{\text{ème}}$ particule, on peut faire correspondre à la désintégration un point situé à l'intérieur d'un triangle équilatéral de hauteur $h = Q_0$ tel que les distances entre ce point et les côtés du triangle équilatéral soient égales aux énergies cinétiques des particules. Toutefois, en vertu de la loi de conservation de l'impulsion dans la désintégration, on ne peut à tout point de l'intérieur du triangle faire correspondre une désintégration de la particule A permise par la cinématique.

Montrer que les points du triangle auxquels on peut faire correspondre une désintégration $A \rightarrow 3a$ sont à l'intérieur du cercle inscrit dans le triangle.

16.3. Soient \mathbf{p}_a , E_a et \mathbf{p}_b , E_b les impulsions et les énergies cinétiques des particules a et b dans un système de coordonnées donné.

Montrer que la combinaison suivante de ces grandeurs :

$$s = -(\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b)^2 + 2(m_a + m_b)(E_a + E_b),$$

a la même valeur dans tous les référentiels d'inertie, c'est-à-dire que cette grandeur est invariante par rapport aux transformations galiléennes.

¹ On appelle *énergie de désintégration* la différence entre l'énergie de la particule avant désintégration et l'énergie des particules produites après la désintégration.

de sorte que (1) et (2) définissent les valeurs possibles pour les énergies des particules produites lors de la désintégration (et donc de l'ensemble des points à l'intérieur du triangle auxquels on peut faire correspondre une désintégration).

Introduisons le système de coordonnées représenté sur la fig. 12 (le point O est au centre du triangle). Soit le point C (de coordonnées x, y) le point correspondant à une désintégration autorisée par la cinématique.

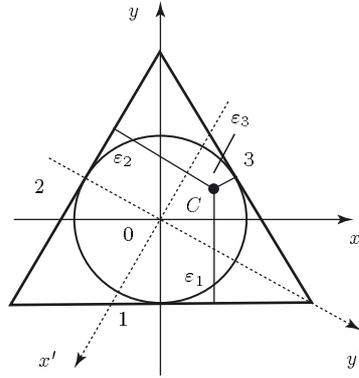


Figure 12

On obtient alors

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{h}{3} + y, & \varepsilon_2 &= \frac{h}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \\ \varepsilon_3 &= \frac{h}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y.\end{aligned}\quad (3)$$

La valeur de ε_1 est évidente et de façon analogue, en introduisant le système de coordonnées x', y' (voir figure), on trouve $\varepsilon_2 = \frac{h}{3} + y'$ et, en utilisant les formules de transformation des coordonnées par une rotation (dans ce cas, une rotation d'angle $2\pi/3$), on trouve la valeur de ε_2 donnée dans (3).

A partir de (2) on obtient $p_2^2 + p_3^2 - 2p_2p_3 \leq p_1^2 \leq p_2^2 + p_3^2 + 2p_2p_3$ qui compte tenu de (1), s'écrit $-2\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3} \leq 2\varepsilon_1 - Q_0 \leq 2\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}$, d'où

$$(2\varepsilon_1 - Q_0)^2 \leq 4\varepsilon_2\varepsilon_3. \quad (4)$$

En substituant dans (4) les valeurs des énergie obtenues dans (3), on obtient $x^2 + y^2 \leq h^2/9 = Q_0^2/9$, qui est l'équation du cercle inscrit dans le triangle (son rayon vaut $h/3 = Q_0/3$).

16.3. Soient $\mathbf{p}_a = m_a\mathbf{v}_a$, $E_a = m_av_a^2/2$ et \mathbf{p}_b , E_b les impulsions et les énergies des particules a et b dans un système de référence K .

Dans le système K' , se déplaçant à la vitesse \mathbf{V} par rapport au système K , on a

$$\begin{aligned}\mathbf{p}'_a &= m_a(\mathbf{v}_a - \mathbf{V}), & \mathbf{p}'_b &= m_b(\mathbf{v}_b - \mathbf{V}), \\ E'_a &= \frac{m_a}{2}(\mathbf{v}_a - \mathbf{V})^2, & E'_b &= \frac{m_b}{2}(\mathbf{v}_b - \mathbf{V})^2.\end{aligned}$$

Un simple calcul montre que

$$s' \equiv (\mathbf{p}'_a + \mathbf{p}'_b)^2 + 2(m_a + m_b)(E'_a + E'_b) = s,$$

c'est-à-dire que s est, en fait, une grandeur invariante par rapport aux transformations galiléennes.

Dans le système où la particule A est au repos, on a $\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b = 0$, de sorte que $s = 2(m_a + m_b)(E_{a,0} + E_{b,0}) = 2MQ_0$.