

MÉCANIQUE

DE LA FORMULATION LAGRANGIENNE
AU CHAOS HAMILTONIEN

Claude GIGNOUX et Bernard SILVESTRE-BRAC

C

17, avenue du Hoggar
Parc d'Activité de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Grenoble Sciences

Grenoble Sciences poursuit un triple objectif :

- réaliser des ouvrages correspondant à un projet clairement défini, sans contrainte de mode ou de programme,
- garantir les qualités scientifique et pédagogique des ouvrages retenus,
- proposer des ouvrages à un prix accessible au public le plus large possible.

Chaque projet est sélectionné au niveau de Grenoble Sciences avec le concours de referees anonymes. Puis les auteurs travaillent pendant une année (en moyenne) avec les membres d'un comité de lecture interactif, dont les noms apparaissent au début de l'ouvrage. Celui-ci est ensuite publié chez l'éditeur le plus adapté.

(Contact : Tél. : (33)4 76 51 46 95, e-mail : Grenoble.Sciences@ujf-grenoble.fr)

Deux collections existent chez EDP Sciences :

- la *Collection Grenoble Sciences*, connue pour son originalité de projets et sa qualité
- *Grenoble Sciences - Rencontres Scientifiques*, collection présentant des thèmes de recherche d'actualité, traités par des scientifiques de premier plan issus de disciplines différentes.

Directeur scientifique de Grenoble Sciences

Jean BORNAREL, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1

Comité de lecture pour "Mécanique"

- Robert ARVIEU, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1
 - Jean-Pierre GAZEAU, Professeur à l'Université Denis Diderot, Paris 7
 - Jacques MEYER, Professeur à l'Institut de Physique Nucléaire, Université Claude Bernard, Lyon 1
 - Amaury MOUCHET, Maître de Conférence, Laboratoire de Physique Théorique, Université François Rabelais, Tours
 - Nicolas PAVLOFF, Maître de Conférence, Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, Université d'Orsay, Paris 11
 - Jean-Bernard ROBERT, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1
- et
- Myriam REFFAY – David CANCOUET – Bertrand RUPH

Grenoble Sciences reçoit le soutien
du **Ministère de l'Éducation nationale**, du **Ministère de la Recherche**,
de la **Région Rhône-Alpes**, du **Conseil général de l'Isère**
et de la **Ville de Grenoble**.

Réalisation et mise en pages : **Centre technique Grenoble Sciences**
Illustration de couverture : **Alice Giraud**

ISBN 2-86883-584-8

© EDP Sciences, 2002

EXTRAITS

1.2. COORDONNÉES GÉNÉRALISÉES

Dans cet ouvrage, on appelle système mécanique un ensemble de N points matériels étiquetés par un numéro $\alpha = 1, \dots, N$; ces points peuvent être des atomes, ou tout autre élément de base pour lequel l'introduction d'une structure plus fondamentale n'est pas nécessaire. On n'attribue qu'une seule caractéristique mécanique¹ à ces points : leur masse m_α . On ne considèrera, par la suite, que les systèmes fermés, c'est-à-dire pour lesquels le nombre N n'est pas sujet à changement. La configuration du système à **un instant donné** est le catalogue des $3N$ coordonnées des N points de rayon vecteur \vec{r}_α dans un système de coordonnées arbitraires (cartésiennes, polaires...) par rapport à un **référentiel galiléen**².

Dans beaucoup de cas, par suite de contraintes, il n'est pas nécessaire de donner l'ensemble des $3N$ coordonnées. Ces contraintes peuvent relever de la nature physique du système lui-même. Par exemple pour un solide les contraintes de cohésion proviennent de forces interatomiques et assurent la constance des distances entre toute paire de points. On peut facilement se convaincre que la spécification physique de l'objet plus six informations positionnelles supplémentaires sont nécessaires et suffisantes pour préciser la configuration ; celle-ci est entièrement déterminée par la position de trois points quelconques du solide. Il faut trois informations pour positionner un point, deux informations supplémentaires pour préciser la direction de la droite sur laquelle se trouve un autre point (n'oublions pas que la distance entre ces deux points est fixée) et une dernière information précisant la position du plan des trois points par rapport à un plan fixe passant par cette droite. Cette dernière information est inutile dans le cas $N = 2$; en conséquence cinq informations suffisent dans ce cas. Une autre manière de voir les choses est la suivante : il faut $3 \times 3 = 9$ données pour positionner trois points quelconques dans l'espace à trois dimensions ; dans le cas d'un solide les trois interdistances sont imposées ce qui fournit trois contraintes ne laissant donc que $9 - 3 = 6$ informations réellement libres. Il existe d'autres types de contraintes dues au contact entre les solides (toujours d'origine interatomique) qui peuvent encore en limiter le nombre.

Exemple 1 – un disque sur un plan

Considérons un disque solide, infiniment fin, de centre C et de rayon R , astreint à rester dans un plan vertical et en contact en I avec le plan xOy (figure 1.1). Il est facile de se convaincre que l'on peut repérer chaque point α du disque, et donc la configuration du système, à l'aide de quatre variables. Soit M un point de référence sur la circonférence du disque. Le point α est repéré sur le disque par sa distance au centre ρ_α , et l'angle ϕ_α entre CM et $C\alpha$.

1 Ce point n'est pas totalement évident ; voir commentaires C1.3, p. 39.

2 Le cas de référentiels accélérés fera l'objet de l'exercice E1.3, p. 29.

RÉSUMÉ

Équations de Lagrange – mode d'emploi

- Déterminer le nombre de coordonnées généralisées.
- Faire un choix des coordonnées et exprimer l'énergie cinétique à l'aide de celles-ci.
- Faire la liste des seules forces qui travaillent dans un déplacement virtuel.
Calculer ce travail ; en déduire les forces généralisées.
- Appliquer la formule de Lagrange qui précise l'évolution du système :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i} = Q_i(q, \dot{q}, t)$$

- Résoudre, lorsque c'est possible, les équations différentielles résultantes.

Exercices proposés dans le cours

E1.1. PERMUTATION DES DÉRIVÉES ■

A partir de la formule (1.1), montrer que l'on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}^f(q(t), t)}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{d\mathbf{r}^f(q(t), t)}{dt} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}^f(q(t), \dot{q}(t), t)}{\partial \dot{q}}$$

Généraliser à un nombre quelconque de coordonnées matérielles \vec{r}_α , et généralisées q_i .

E1.2. FORCE DE RÉACTION DE LA PERLE ■ ■

Cet exercice simple permet d'illustrer la différence entre travail virtuel et travail réel. On s'intéresse à la force de réaction du cerceau sur la perle dans l'exemple 2. En introduisant une nouvelle coordonnée généralisée qui permette un travail pour la composante de la force de réaction normale au plan du cerceau, déterminer celle-ci. Contrôler votre résultat à l'aide de la force d'inertie de Coriolis.

Réponse – Pour faire travailler cette force, il faut obliger la perle à quitter le plan du cerceau et pour cela choisir comme coordonnée supplémentaire l'angle entre le plan du cerceau et le plan déterminé par l'axe de rotation et la bille.

Chapitre 3

LE PRINCIPE DE HAMILTON

Cours

Dans le chapitre précédent, nous avons déduit les équations de Lagrange comme alternative à la formulation de Newton ; dans ce chapitre, nous allons montrer que celles-ci sont la conséquence d'un postulat qui dépasse de loin les lois de la mécanique de Newton. Il s'agit du principe de Hamilton ou de moindre action. Celui-ci dit qu'une solution des équations de Lagrange est une fonction $q(t)$, telle qu'une petite variation de celle-ci n'entraîne, au premier ordre, aucune modification d'une quantité appelée action. On dit qu'une solution rend stationnaire l'action. Nous remplaçons déjà une condition portant sur un système de n équations différentielles couplées par une condition portant sur une seule quantité, l'action. Mais ce principe est beaucoup plus intéressant car de portée immensément plus large. Pour chaque système physique, constitué de particules et / ou de champs, il existe une telle action. D'une certaine façon ce principe est capable de décrire toutes les facettes de la physique. Il est réellement universel et peut être, avec des précisions données ultérieurement, énoncé ainsi :

Principe de moindre action

Le comportement réel d'un système physique quelconque est celui qui rend stationnaire l'action.

Tout l'art du physicien consiste ensuite à "deviner" l'expression correcte de cette fameuse action.

Remarques de sémantique

A strictement parler, la stationnarité n'implique pas forcément un extremum. De plus un extremum n'est pas forcément un minimum; ce peut être aussi un maximum. On peut donc s'étonner de la formulation consacrée par l'usage de "moindre action". Une fonction dont toutes les dérivées partielles sont nulles en un point est dite stationnaire en ce point; ce cas peut correspondre à un maximum local (toutes les valeurs de la fonction au voisinage de ce point sont inférieures à la valeur en ce point), à un minimum local (toutes les valeurs de la fonction au voisinage de ce point sont supérieures à la valeur en ce point) ou à un point selle (minimum pour

Par définition :

$$\delta S(q) = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q(t) + \varepsilon(t), \dot{q}(t) + \dot{\varepsilon}(t), t) - L(q(t), \dot{q}(t), t) \right] dt$$

Si on se borne au premier ordre en $\varepsilon(t)$ et $\dot{\varepsilon}(t)$ dans le développement de Taylor du lagrangien, la différentielle devient :

$$\delta S(q) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\left. \frac{\partial}{\partial q} L(q, \dot{q}, t) \right|_t \varepsilon(t) + \left. \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L(q, \dot{q}, t) \right|_t \dot{\varepsilon}(t) \right) dt$$

Intégrons par parties le deuxième terme pour réécrire :

$$\delta S(q) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\left. \frac{\partial}{\partial q} L(q, \dot{q}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L(q, \dot{q}, t) \right) \varepsilon(t) dt + \left(\varepsilon(t) \left. \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L(q, \dot{q}, t) \right) \right)_{t_1}^{t_2} \quad (3.3)$$

Considérons l'ensemble des fonctions continues et dérivables $q(t)$ à valeur fixée aux extrémités c'est-à-dire que, dans leur variation, $\varepsilon(t_1)$ et $\varepsilon(t_2)$ sont nuls. Cette condition rend nul le dernier terme de (3.3).

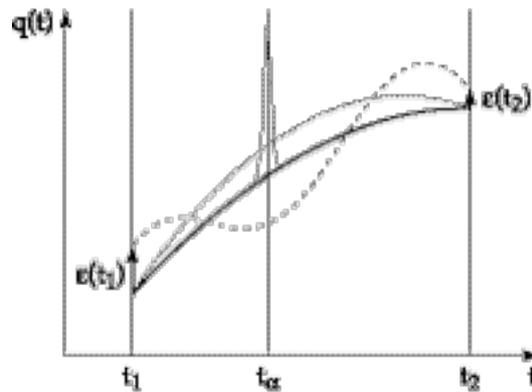


Figure 3.1 - Trois chemins (en pointillés) au voisinage d'une trajectoire donnée (en trait continu). Les chemins à considérer dans le principe de Hamilton sont ceux en tirets courts. L'un des deux ne diffère significativement de la trajectoire qu'autour d'une valeur fixée t_α . Le chemin en tirets longs est exclu du principe de variation car les écarts aux extrémités (flèches) ne sont pas nuls.

L'action est stationnaire si le terme du premier ordre en $\varepsilon(t)$ est nul quel que soit $\varepsilon(t)$. Choisissons une fonction $\varepsilon_\alpha(t)$ nulle partout dans l'intervalle sauf sur un très petit domaine centré autour de t_α (figure 3.1) ; l'intégrale fait apparaître l'intégrant au temps t_α qui doit donc s'annuler pour cette valeur. L'arbitraire dans le choix de t_α implique que la prescription de stationnarité est équivalente à rendre l'intégrant de (3.3) nul sur tout l'intervalle en t . Autrement dit, on doit avoir la condition :

$$\frac{\partial}{\partial q} L(q, \dot{q}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (3.4)$$

qui s'identifie précisément à l'équation de Lagrange. Ce résultat se généralise aisément au cas d'un nombre arbitraire discret de degrés de liberté. Notons cependant que l'obtention d'équations du type (3.4) nécessite que les variations infinitésimales intervenant dans l'action soient indépendantes les unes des autres.

Les équations de Lagrange rendent stationnaire l'action et, réciproquement, les fonctions qui rendent stationnaire l'action doivent satisfaire les équations de Lagrange.

Ainsi, dans l'espace de configuration du système, parmi l'infinité de chemins possibles qui passent par deux points imposés, la nature choisit précisément pour trajectoire (le mouvement réel) un chemin qui rend stationnaire l'action.

Exemple 11 – la longueur d'une courbe plane: géodésique

Utilisons les conditions de stationnarité(3.4) pour déterminer l'équation de la courbe du plan $f(x)$ de longueur minimum – ou géodésique – entre deux points fixes A et B. La fonctionnelle à minimiser $s(f)$ n'est pas une action au sens mécanique du terme puisque l'intégrant $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ n'est pas un lagrangien, et que la variable d'intégration x n'est pas un temps. Néanmoins le formalisme précédent s'applique avec les substitutions évidentes $t \rightarrow x$, $q(t) \rightarrow f(x)$, $\dot{q}(t) \rightarrow f'(x)$ et $L(q, \dot{q}, t) \rightarrow \sqrt{1 + f'(x)^2}$. On remarque tout de suite que la variable f est cyclique et que la condition (3.4) entraîne $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \text{cte}$, soit

$\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} = \text{cte}$. Cette dernière égalité est équivalente à $f'(x) = \text{cte}$, ce qui correspond à l'équation d'une droite, comme on pouvait s'y attendre.

Le type de substitution présenté en détail dans l'exemple précédent sera abondamment utilisé dans la suite sans autre formalité.

NEWTON ou HAMILTON ?

Les lois de Newton ont été inventées pour répondre aux questions de la mécanique classique. Elles peuvent être étendues de façon peu élégante à la mécanique relativiste et ne sont pas adaptées pour les autres domaines de la physique. En particulier l'électromagnétisme est gouverné par les lois de Maxwell, qui n'ont aucun lien avec les lois de Newton. Le principe de Hamilton, dans sa très grande généralité, peut aussi bien retrouver les lois de Newton³ que les lois de Maxwell par deux choix d'action différents. En fait, toutes les lois de la physique peuvent être déduites du principe de Hamilton par une prescription convenable de l'action.

3 A strictement parler, le principe de moindre action est simplement équivalent à la deuxième loi de Newton, le principe fondamental de la dynamique. La troisième loi, ou loi d'égalité de l'action et de la réaction, est un postulat supplémentaire.

Le mouvement $(x(t), p(t))$ à un instant quelconque (antérieur ou ultérieur) est toujours tel que $H(x(t), p(t)) = E$. De (4.13) et de la remarque précédente, on déduit :

$$p = \pm \sqrt{2m(E - V(x))} \quad (4.14)$$

Le signe est important et doit être analysé avec soin. L'équation précédente $p = p(x; E)$ donne une famille de courbes dans le plan (x, p) , étiquetées par le paramètre E . Cette famille constitue ce que l'on appelle le portrait de phase du système.

Ce portrait contient toutes les informations qui caractérisent le système, c'est-à-dire non seulement la position mais aussi la vitesse. De ces informations, on peut obtenir toute la trajectoire dans le futur comme dans le passé en résolvant les équations de Hamilton.

Dans l'exemple 18 du pendule simple nous allons prendre le temps de nous familiariser avec cette représentation un peu déroutante qu'est le portrait de phase. Nous recommandons fortement au lecteur de dessiner lui-même ce portrait (une petite calculatrice suffit).

Exemple 18 – le pendule simple

On choisit pour coordonnée du système l'angle du pendule avec la verticale ascendante. Il lui correspond un point sur un cercle. L'impulsion est précisée par un point sur la droite R . L'espace de phase a la topologie d'un cylindre; ainsi vous devez recoller mentalement les droites $\theta=0$ et $\theta=2\pi$, ou les deux bords gauche et droit de la figure 4.6. Pour nous rapprocher de la forme (4.13), nous prenons une longueur unité $l=1$. La fonction de Hamilton est donnée par :

$$H(\theta, p) = \frac{p^2}{2m} + mg \cos \theta$$

Le portrait de phase est obtenu en traçant les courbes d'iso-énergie.

$$p(\theta) = \pm \sqrt{2m(E - mg \cos \theta)}$$

Il existe deux types de courbes :

Si l'énergie est supérieure à l'énergie potentielle en position haute $E > mg$, partant du haut $\theta=0$ dans un sens $p = m\dot{\theta} > 0$, l'énergie cinétique et l'impulsion vont augmenter au détriment de l'énergie potentielle (la courbe est croissante); elles atteignent leur maximum au point bas $\theta = \pi$, puis se mettent à décroître au profit de l'énergie potentielle; elles reprennent leurs valeurs initiales après un tour $\theta=2\pi$. La vitesse ne s'est jamais annulée et n'a donc jamais changé de signe: le mouvement consiste en une **rotation** périodique. Il lui correspondent les courbes au-dessus de la courbe en pointillés ($p > 0$), de période 2π dans le portrait de phase. Ces courbes sont parcourues de gauche à droite, comme l'indiquent les flèches puisque, la vitesse étant positive, l'angle croît (lentement au point haut et plus vite au point bas). Il existe les courbes symétriques avec $p < 0$ correspondant à des rotations dans l'autre sens.

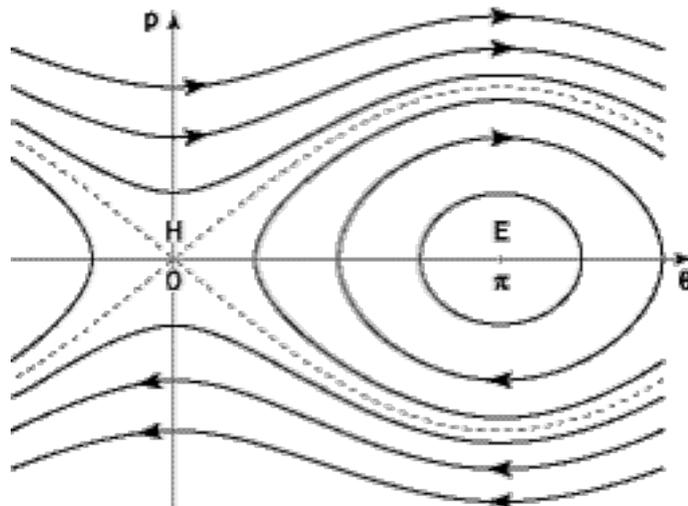


Figure 4.6 - Portrait de phase du pendule. Les positions d'équilibre sont pour la position la plus haute instable $\theta=0$ et la plus basse $\theta=\pi$. La courbe en pointillés (séparatrice) sépare deux types de mouvements. A l'extérieur, il s'agit des rotations dans un sens pour les lignes du haut ou dans l'autre sens pour les lignes du bas. A l'intérieur, il s'agit des librations de différentes amplitudes.

A présent considérons une énergie inférieure à l'énergie potentielle en position haute $E < mg$. Nous avons affaire aux courbes à l'intérieur de la courbe en pointillés.

Partons du point le plus haut θ_0 (qui correspond à la plus faible valeur de l'angle, $\pi - \theta_0$ est l'amplitude du pendule) où l'impulsion est nulle; après le lâcher du pendule l'angle augmente avec une impulsion positive, le point figuratif se déplace vers la droite dans la zone $p > 0$. Le pendule passe le point le plus bas $\theta = \pi$ avec une impulsion maximum, puis l'énergie potentielle croît au détriment de l'énergie cinétique qui s'annule à nouveau au point le plus haut $2\pi - \theta_0$. On a parcouru la branche $p = \sqrt{2m(E - V(\theta))}$ d'une courbe qui ressemble à une ellipse, jusqu'à couper l'axe horizontal. Mais la force de rappel existe toujours, l'angle va diminuer et l'impulsion changer de sens; on va parcourir la branche $p = -\sqrt{2m(E - V(\theta))}$ de droite à gauche, dans la partie inférieure de la figure, pour revenir au point d'origine. Ce phénomène d'alternance s'appelle la **libration**. Le mouvement est encore périodique mais la courbe d'iso-énergie n'est plus périodique.

Pour le dernier cas $E = mg$, la courbe d'iso-énergie est appelée **séparatrice** des deux types de mouvements. Nous verrons plus loin qu'il faut un temps infini pour atteindre ou quitter son extrémité.

Chapitre 6

SYSTÈMES INTÉGRABLES

Cours

6.1. SYSTÈMES RÉGULIERS OU CHAOTIQUES ?

Les phénomènes naturels prennent des formes très variées ; l'Homme, dans sa quête de compréhension de la Nature, échafaude des théories susceptibles de décrire les divers comportements. Mais il a fort à faire ! En effet, il apparaît que certains phénomènes présentent un comportement régulier et d'autres, au contraire, semblent complètement désordonnés. De manière assez floue, on pourrait dire qu'un comportement est régulier s'il est prévisible à plus ou moins long terme, c'est-à-dire si on peut suivre sa trajectoire dans le futur à partir de sa connaissance dans le passé. Un cas extrême d'un comportement régulier est celui d'un système périodique : la connaissance de sa période et du mouvement sur la période est suffisante pour prédire l'état du système à n'importe quelle époque du futur. L'exemple du pendule simple illustre tout à fait ce cas de figure.

Il peut arriver que, sans être périodique, un mouvement présente suffisamment de régularité pour que l'on n'ait aucune surprise quant à sa description future. L'orbite de la Terre autour du soleil n'est pas strictement une pure ellipse, mais une "ellipse" qui précesse ; son périhélie varie très légèrement d'une année à l'autre (c'est le phénomène de précession du périhélie étudié dans le problème P3.19, p. 154). Le mouvement n'est pas parfaitement périodique, mais nous savons tous que les saisons reviennent chaque année et nous sommes capables de calculer les éphémérides d'un futur lointain.

A l'autre extrême, il existe des mouvements dont le comportement à très long terme est absolument imprévisible ; on parle de nos jours de systèmes chaotiques. Dans ces systèmes, il arrive de façon inopinée et qui semble aléatoire des "accidents de parcours", ou des "dérives" qui nous empêchent de voir correctement dans le futur. Le cas de la valeur et du sens du champ magnétique terrestre fait partie de cette catégorie. Nous savons que, par le passé, l'orientation de ce champ s'est renversée de nombreuses fois mais, même en lisant avec attention l'histoire passée de ce champ, nous sommes dans l'incapacité de prévoir le prochain renversement. De même les météorologues disposent d'archives fantastiques concernant

Compléments

C8.1. IMPRÉVISIBILITÉ ET DÉTERMINISME

Nous avons tous l'expérience des jeux de hasard. Nous savons que le résultat d'un jeté de dé donne au hasard une des six faces, avec la même probabilité $1/6$. On peut s'en étonner : ce dé obéit en effet aux lois déterministes de la mécanique dans sa chute comme dans ses rebonds, et on peut se demander : pourquoi un joueur adroit ne pourrait-il pas adapter sa façon de lancer pour obtenir les conditions initiales favorables à la face désirée ? On peut dire la même chose de la roulette, du flipper etc. mais pas de tous les jeux, en particulier ceux d'adresse tels fléchettes, pétanque, bilboquet, baby-foot, ..., de tirs en général. Pour ceux-ci, un joueur expérimenté battra inmanquablement un néophyte.

Il y a quelque chose de fondamentalement différent entre les jeux de hasard et les jeux d'adresse : la sensibilité plus ou moins grande aux conditions initiales. Les jeux de hasard sont tellement sensibles aux conditions initiales que la dextérité humaine n'est pas capable de les maîtriser, au contraire des jeux d'adresse qui y sont beaucoup moins sensibles. Cette constatation de la vie courante est en fait tout à fait générale et pourrait se traduire ainsi : malgré le déterminisme, la prévision ne peut être qu'illusoire²⁸.

Illustrons cette notion d'imprévisibilité dans un monde déterministe avec notre simple rotateur percuté.

Revenons à notre système hamiltonien du rotateur percuté, tellement facile à résoudre qu'il se ramène à l'application standard. Pour vous convaincre de la remarque précédente, nous vous invitons à une petite expérience numérique. Pour fixer les idées, choisissons une perturbation assez grande susceptible d'introduire du chaos, disons $K = 1$.

Le point $(0,0)$ est un point fixe instable ; même en choisissant des conditions initiales très proches, on ne peut que s'en éloigner. Oui, mais à quelle vitesse ? Gardons des conditions initiales telles que $p_0 = \tilde{p}_0 = 0,001$, et faisons varier θ_0 au voisinage de 0. En route pour l'itération de l'application ; on mesure l'éloignement à la trajectoire de référence $(\tilde{\theta}_0 = 0, \tilde{p}_0)$, à l'itération n , tout bêtement par sa distance euclidienne $\Delta_n = \sqrt{(p_n - \tilde{p}_n)^2 + (\theta_n - \tilde{\theta}_n)^2}$, où le point $(\tilde{\theta}_n, \tilde{p}_n)$ se réfère au point de départ $(\tilde{\theta}_0 = 0, \tilde{p}_0)$ et (θ_n, p_n) au point de départ légèrement voisin $(\theta_0 \cong 0, p_0 = \tilde{p}_0)$. La règle du jeu est la suivante. A partir de combien d'itérations la valeur Δ_n excède-t-elle une valeur fixée à l'avance, disons $\varepsilon = 0,1$?

²⁸ Faut-il avoir peur des clones ?

Prêt, partez ! Avec $\theta_0 = 10^{-3}$, nous constatons avec effarement que dès $n = 6$ nous sommes hors-jeu. Qu'à cela ne tienne, partons de plus près et diminuons θ_0 d'un ordre de grandeur : $\theta_0 = 10^{-4}$. Allons-nous gagner un ordre de grandeur sur n et nous approcher de $n = 60$? Que nenni, dès $n = 13$ nous sortons de la piste. Répétons cette expérience en diminuant à chaque fois θ_0 d'un ordre de grandeur ; pour $\theta_0 = 10^{-9}$ nous restons alors dans la course jusqu'à $n = 48$! Grosso modo, chaque fois qu'on diminue θ_0 d'un ordre de grandeur, on ne gagne que sept itérations dans la course. A une progression géométrique, on associe une progression arithmétique ; vous reconnaissez là une sensibilité exponentielle aux conditions initiales. La course à la précision est perdue d'avance ! Tôt ou tard, les erreurs d'arrondi au codage, forcément limité, des nombres par l'ordinateur entreront en compte, la prévision s'arrêtera pour un nombre n fixé par le problème physique et les capacités de calcul des ordinateurs.

► L'effet papillon

Transposons cette petite expérience à la météo. L'application standard simule les équations complexes (de type Navier-Stokes) non linéaires de la circulation atmosphérique, des interactions avec les océans, ... Les conditions initiales (θ_0, p_0) sont dans ce cas les données de température, humidité, pression, vitesse du vent, ... en tous les points de la Terre, variables continues dans les équations mais qu'il faut bien discrétiser d'une façon ou d'une autre. Le paramètre ε joue le rôle de la fiabilité des prévisions, celui en dessous duquel on ne peut pas se permettre de déborder sous peine de hauts cris des agriculteurs, des pêcheurs, ... Enfin n pourrait représenter le nombre de jours pour lesquels les prédictions sont fiables. Indépendamment du fait que les équations de la météorologie ne représentent peut-être pas la réalité physique, elles sont extrêmement sensibles aux conditions initiales et divergent de façon exponentielle. De façon imagée, on a qualifié ce phénomène d'effet papillon : un battement d'aile intempestif d'un papillon en Amérique du Sud peut être à l'origine du déclenchement d'un typhon sur le Japon un mois plus tard. Par exemple, pour gagner un jour supplémentaire de prévision, il faut affiner d'un facteur 10 les conditions initiales. En fait, ce n'est pas tant dans la précision des mesures elles-mêmes que nous sommes démunis, c'est plutôt dans le maillage géographique des capteurs. Gagner un facteur 10 signifie multiplier par 10 le nombre de capteurs, y compris sur les océans, ce qui est une gageure insurmontable. Nos ordinateurs ont une puissance limitée en rapidité (il ne faut pas que le temps de calcul soit supérieur à l'échéance de la prévision !), en place de stockage, et sont forcés de représenter un nombre réel comme une fraction. Tous ces facteurs entrent en jeu lorsqu'on veut améliorer les conditions initiales. Cette course à la prévision est perdue d'avance même pour un système déterministe²⁹.

29 On ne doit pas oublier que la mécanique quantique est elle aussi déterministe dans le sens où le vecteur d'état obéit à une équation déterministe (équation de Schrödinger). Seul le résultat d'une mesure présente un caractère indéterministe.