MÉCANIQUE

DE LA FORMULATION LAGRANGIENNE
AU CHAOS HAMILTONIEN

Claude GIGNOUX et Bernard SILVESTRE-BRAC

C

17, avenue du Hoggar
Parc d'Activité de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Grenoble Sciences

Grenoble Sciences poursuit un triple objectif :

- réaliser des ouvrages correspondant à un projet clairement défini, sans contrainte de mode ou de programme,
- garantir les qualités scientifique et pédagogique des ouvrages retenus,
- proposer des ouvrages à un prix accessible au public le plus large possible.

Chaque projet est sélectionné au niveau de Grenoble Sciences avec le concours de referees anonymes. Puis les auteurs travaillent pendant une année (en moyenne) avec les membres d'un comité de lecture interactif, dont les noms apparaissent au début de l'ouvrage. Celui-ci est ensuite publié chez l'éditeur le plus adapté.

(Contact : Tél. : (33)4 76 51 46 95, e-mail : Grenoble.Sciences@ujf-grenoble.fr)

Deux collections existent chez EDP Sciences :

- la ***Collection Grenoble Sciences***, connue pour son originalité de projets et sa qualité
- ***Grenoble Sciences - Rencontres Scientifiques***, collection présentant des thèmes de recherche d'actualité, traités par des scientifiques de premier plan issus de disciplines différentes.

Directeur scientifique de Grenoble Sciences

Jean BORNAREL, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1

Comité de lecture pour "Mécanique"

- Robert ARVIEU, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1
- Jean-Pierre GAZEAU, Professeur à l'Université Denis Diderot, Paris 7
- Jacques MEYER, Professeur à l'Institut de Physique Nucléaire, Université Claude Bernard, Lyon 1
- Amaury MOUCHET, Maître de Conférence, Laboratoire de Physique Théorique, Université François Rabelais, Tours
- Nicolas PAVLOFF, Maître de Conférence, Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, Université d'Orsay, Paris 11
- Jean-Bernard ROBERT, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1

et

- Myriam REFFAY – David CANCOUET – Bertrand RUPH

Grenoble Sciences reçoit le soutien
du **Ministère de l'Éducation nationale,** du **Ministère de la Recherche**,
de la **Région Rhône-Alpes**, du **Conseil général de l'Isère**
et de la **Ville de Grenoble**.

Réalisation et mise en pages : **Centre technique Grenoble Sciences**
Illustration de couverture : **Alice Giraud**

ISBN 2-86883-584-8

EXTRAITS

1.2. COORDONNÉES GÉNÉRALISÉES

Dans cet ouvrage, on appelle système mécanique un ensemble de N points matériels étiquetés par un numéro $\alpha = 1, \ldots, N$; ces points peuvent être des atomes, ou tout autre élément de base pour lequel l'introduction d'une structure plus fondamentale n'est pas nécessaire. On n'attribue qu'une seule caractéristique mécanique [1] à ces points : leur masse m_α. On ne considèrera, par la suite, que les systèmes fermés, c'est-à-dire pour lesquels le nombre N n'est pas sujet à changement. La configuration du système à **un instant donné** est le catalogue des 3N coordonnées des N points de rayon vecteur $\vec{r}_\alpha$ dans un système de coordonnées arbitraires (cartésiennes, polaires…) par rapport à un **référentiel galiléen** [2].

Dans beaucoup de cas, par suite de contraintes, il n'est pas nécessaire de donner l'ensemble des 3N coordonnées. Ces contraintes peuvent relever de la nature physique du système lui-même. Par exemple pour un solide les contraintes de cohésion proviennent de forces interatomiques et assurent la constance des distances entre toute paire de points. On peut facilement se convaincre que la spécification physique de l'objet plus six informations positionnelles supplémentaires sont nécessaires et suffisantes pour préciser la configuration ; celle-ci est entièrement déterminée par la position de trois points quelconques du solide. Il faut trois informations pour positionner un point, deux informations supplémentaires pour préciser la direction de la droite sur laquelle se trouve un autre point (n'oublions pas que la distance entre ces deux points est fixée) et une dernière information précisant la position du plan des trois points par rapport à un plan fixe passant par cette droite. Cette dernière information est inutile dans le cas $N = 2$; en conséquence cinq informations suffisent dans ce cas. Une autre manière de voir les choses est la suivante : il faut $3 \times 3 = 9$ données pour positionner trois points quelconques dans l'espace à trois dimensions ; dans le cas d'un solide les trois interdistances sont imposées ce qui fournit trois contraintes ne laissant donc que $9 - 3 = 6$ informations réellement libres. Il existe d'autres types de contraintes dues au contact entre les solides (toujours d'origine interatomique) qui peuvent encore en limiter le nombre.

Exemple 1 – un disque sur un plan

> Considérons un disque solide, infiniment fin, de centreC et de rayonR, astreint à rester dans un plan vertical et en contact en I avec le planxOy (figure1.1). Il est facile de se convaincre que l'on peut repérer chaque point α du disque, et donc la configuration du système, à l'aide de quatrevariables. Soit M un point de référence sur la circonférence du disque. Le point α est repéré sur le disque par sa distance au centre ρ_α, et l'angle ϕ_α entre CM et Cα.

---

1 Ce point n'est pas totalement évident ; voir commentaires C1.3, p. 39.

2 Le cas de référentiels accélérés fera l'objet de l'exercice E1.3, p. 29.

RÉSUMÉ
Équations de Lagrange – mode d'emploi

- Déterminer le nombre de coordonnées généralisées.
- Faire un choix des coordonnées et exprimer l'énergie cinétique à l'aide de celles-ci.
- Faire la liste des seules forces qui travaillent dans un déplacement virtuel.
  Calculer ce travail ; en déduire les forces généralisées.
- Appliquer la formule de Lagrange qui précise l'évolution du système :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T(q,\dot{q},t)}{\partial q_i} = Q_i(q,\dot{q},t)$$

- Résoudre, lorsque c'est possible, les équations différentielles résultantes.

Exercices proposés dans le cours

E1.1. PERMUTATION DES DÉRIVÉES ■

A partir de la formule (1.1), montrer que l'on peut écrire :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}(q(t),t)}{\partial q}\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{d\vec{r}(q(t),t)}{dt}\right) = \frac{\partial \vec{v}(q(t),\dot{q}(t),t)}{\partial q}$$

Généraliser à un nombre quelconque de coordonnées matérielles $\vec{r}_\alpha$, et généralisées q_i.

E1.2. FORCE DE RÉACTION DE LA PERLE ■■

Cet exercice simple permet d'illustrer la différence entre travail virtuel et travail réel. On s'intéresse à la force de réaction du cerceau sur la perle dans l'exemple 2. En introduisant une nouvelle coordonnée généralisée qui permette un travail pour la composante de la force de réaction normale au plan du cerceau, déterminer celle-ci. Contrôler votre résultat à l'aide de la force d'inertie de Coriolis.

Réponse – Pour faire travailler cette force, il faut obliger la perle à quitter le plan du cerceau et pour cela choisir comme coordonnée supplémentaire l'angle entre le plan du cerceau et le plan déterminé par l'axe de rotation et la bille.

Chapitre 3

LE PRINCIPE DE HAMILTON

Cours

Dans le chapitre précédent, nous avons déduit les équations de Lagrange comme alternative à la formulation de Newton ; dans ce chapitre, nous allons montrer que celles-ci sont la conséquence d'un postulat qui dépasse de loin les lois de la mécanique de Newton. Il s'agit du principe de Hamilton ou de moindre action. Celui-ci dit qu'une solution des équations de Lagrange est une fonction $q(t)$, telle qu'une petite variation de celle-ci n'entraîne, au premier ordre, aucune modification d'une quantité appelée action. On dit qu'une solution rend stationnaire l'action. Nous remplaçons déjà une condition portant sur un système de n équations différentielles couplées par une condition portant sur une seule quantité, l'action. Mais ce principe est beaucoup plus intéressant car de portée immensément plus large. Pour chaque système physique, constitué de particules et / ou de champs, il existe une telle action. D'une certaine façon ce principe est capable de décrire toutes les facettes de la physique. Il est réellement universel et peut être, avec des précisions données ultérieurement, énoncé ainsi :

Principe de moindre action

Le comportement réel d'un système physique quelconque est celui qui rend stationnaire l'action.

Tout l'art du physicien consiste ensuite à "deviner" l'expression correcte de cette fameuse action.

Remarques de sémantique

A strictement parler, la stationnarité n'implique pas forcément un extremum. De plus un extremum n'est pas forcément un minimum; ce peut être aussi un maximum. On peut donc s'étonner de la formulation consacrée par l'usage de "moindre action". Une fonction dont toutes les dérivées partielles sont nulles en un point est dite stationnaire en ce point; ce cas peut correspondre à un maximum local (toutes les valeurs de la fonction au voisinage de ce point sont inférieures à la valeur en ce point), à un minimum local (toutes les valeurs de la fonction au voisinage de ce point sont supérieures à la valeur en ce point) ou à un point selle (minimum pour

qui s'identifie précisément à l'équation de Lagrange. Ce résultat se généralise aisément au cas d'un nombre arbitraire discret de degrés de liberté. Notons cependant que l'obtention d'équations du type (3.4) nécessite que les variations infinitésimales intervenant dans l'action soient indépendantes les unes des autres.

Les équations de Lagrange rendent stationnaire l'action et, réciproquement, les fonctions qui rendent stationnaire l'action doivent satisfaire les équations de Lagrange.

Ainsi, dans l'espace de configuration du système, parmi l'infinité de chemins possibles qui passent par deux points imposés, la nature choisit précisément pour trajectoire (le mouvement réel) un chemin qui rend stationnaire l'action.

Exemple 11 – la longueur d'une courbe plane: géodésique

Utilisons les conditions de stationnarité (3.4) pour déterminer l'équation de la courbe du plan $f(x)$ de longueur minimum – ou géodésique – entre deux points fixes A et B. La fonctionnelle à minimiser $s(f)$ n'est pas une action au sens mécanique du terme puisque l'intégrant $\sqrt{1+f'(x)^2}$ n'est pas un lagrangien, et que la variable d'intégration x n'est pas un temps. Néanmoins le formalisme précédent s'applique avec les substitutions évidentes $t \to x$, $q(t) \to f(x)$, $\dot{q}(t) \to f'(x)$ et $L(q,\dot{q},t) \to \sqrt{1+f'(x)^2}$. On remarque tout de suite que la variable f est cyclique et que la condition (3.4) entraîne $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \text{cte}$, soit $\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = \text{cte}$. Cette dernière égalité est équivalente à $f'(x) = \text{cte}$, ce qui correspond à l'équation d'une droite, comme on pouvait s'y attendre.

Le type de substitution présenté en détail dans l'exemple précédent sera abondamment utilisé dans la suite sans autre formalité.

NEWTON ou HAMILTON ?

Les lois de Newton ont été inventées pour répondre aux questions de la mécanique classique. Elles peuvent être étendues de façon peu élégante à la mécanique relativiste et ne sont pas adaptées pour les autres domaines de la physique. En particulier l'électromagnétisme est gouverné par les lois de Maxwell, qui n'ont aucun lien avec les lois de Newton. Le principe de Hamilton, dans sa très grande généralité, peut aussi bien retrouver les lois de Newton[3] que les lois de Maxwell par deux choix d'action différents. En fait, toutes les lois de la physique peuvent être déduites du principe de Hamilton par une prescription convenable de l'action.

3 A strictement parler, le principe de moindre action est simplement équivalent à la deuxième loi de Newton, le principe fondamental de la dynamique. La troisième loi, ou loi d'égalité de l'action et de la réaction, est un postulat supplémentaire.