

```

alfa = 0.3; beta = 2;
t = 0:0.1:10;
x = exp(-alfa*t).*cos(beta*t);
plot2d(t,x)

```

1  
2  
3  
4

Le résultat apparaît sur la figure 1.2. Ce n'est pas ici le lieu de détailler la syntaxe de Scilab, qui est très bien expliquée dans l'aide en ligne, dans les manuels et sur divers sites (voir les références en fin de chapitre); nous nous contenterons de quelques indications.

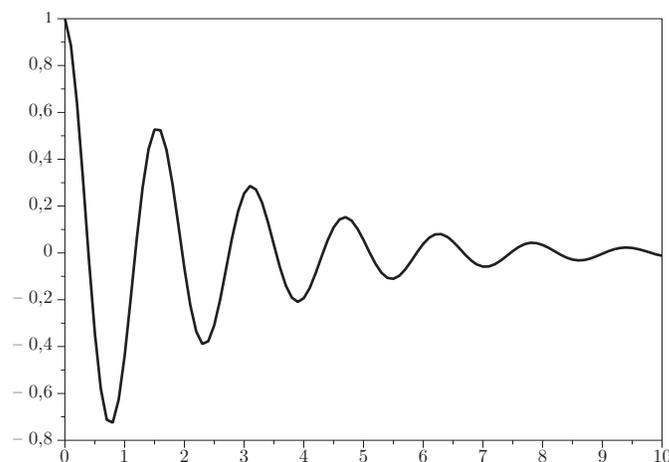


Figure 1.2 – Une sinusoïde amortie représentée par Scilab.

La première ligne définit et initialise les deux paramètres; les points-virgules indiquent à Scilab qu'il ne doit pas afficher à l'écran les valeurs qui viennent d'être définies. La deuxième ligne initialise un vecteur ligne,  $t$ , dont les coordonnées sont  $t_1 = 0, t_2 = 0.1, t_3 = 0.2, \dots, t_{101} = 1.0$ ; les éléments de tableaux (vecteurs, matrices) sont toujours numérotés à partir de 1. La ligne suivante calcule le vecteur  $x$ . Vous pouvez constater qu'il se passe pas mal de choses « en douce ». Les composantes du vecteur  $t$  sont successivement utilisées comme arguments des fonctions exponentielle et cosinus. Ainsi,  $\exp(-\text{alfa}*t)$  est un vecteur ligne de composantes  $\exp(-\alpha t_i)$ . Les deux tableaux représentés par  $\exp(-\text{alfa}*t)$  et  $\cos(\text{beta}*t)$  sont ensuite multipliés **élément par élément** (c'est ce qu'indique la notation « **point-étoile** » du produit) pour former le résultat, un vecteur ligne de coordonnées  $x_i = \exp(-\alpha t_i) \cos(\beta t_i)$ . Le programme relie ensuite par des segments les points successifs de coordonnées  $(t_i, x_i)$ , pour produire un tracé lisse.

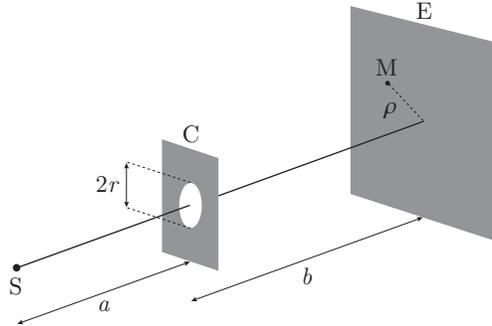
La fonction `plot2d` peut recevoir des arguments supplémentaires, qui permettent de définir des axes, des graduations, de modifier l'épaisseur et la couleur des traits, d'introduire des légendes ou un titre.

En ajoutant la ligne `y = exp(-alfa*t).*sin(beta*t)` et en modifiant l'instruction de tracé, qui devient `plot2d(t, [x,y])`, nous obtenons, sur le même graphe, les

Vous pourrez alors tenter de vérifier l'hypothèse de Riemann : tous les zéros de  $\zeta$  se trouvent sur la droite verticale d'équation  $x = 0,5$ . Cette conjecture a été vérifiée numériquement pour quelques milliards de zéros, mais n'est pas démontrée.

### Projet 2. Diffraction de Fresnel

Dans la figure 2.6, S est une source ponctuelle monochromatique, C est un écran percé d'une ouverture circulaire de rayon  $r$  et E est un écran d'observation.



**Figure 2.6** – Définition des variables pour le diffraction de Fresnel.

On désigne par  $\rho$  la distance d'un point courant de E (M) à l'axe, par  $a$  la distance de S à C, par  $b$  la distance de C à E et par  $I_0$  l'éclairement de l'écran en l'absence d'obstacle. On pose

$$y = \frac{2\pi a + b}{\lambda} \frac{a + b}{ab}; \quad z = \frac{2\pi \rho r}{\lambda b}$$

L'intensité diffractée par cette ouverture circulaire, dans les conditions de l'approximation de Fresnel, s'écrit :

$$\begin{aligned} I_1(y, z)/I_0 &= U_1^2(y, z) + U_2^2(y, z) \\ &= \left[ V_0(y, z) - \cos\left(\frac{y^2 + z^2}{2y}\right) \right]^2 + \left[ V_1(y, z) - \sin\left(\frac{y^2 + z^2}{2y}\right) \right]^2. \end{aligned}$$

Les fonctions de Lommel  $U$  et  $V$  sont des séries de fonctions de Bessel :

$$U_i = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{y}{z}\right)^{i+2j} J_{i+2j}(z) \quad ; \quad V_i = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{z}{y}\right)^{i+2j} J_{i+2j}(z).$$

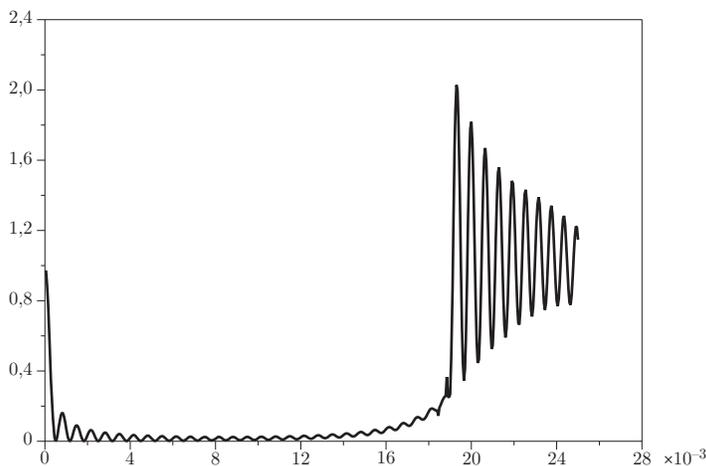
On demande de tracer la courbe représentant l'éclairement du plan E en fonction de la distance à l'axe  $\rho$ . Les quantités  $U_i, V_i$  étant des sommes infinies, il faudra choisir un critère de convergence qui permette d'interrompre le calcul à partir d'un certain rang. Cependant, il sera nécessaire d'utiliser des fonctions de Bessel d'indice au moins égal à 50. Ceci ne pose pas de difficulté avec un logiciel comme Scilab. Pour programmer vous-mêmes le calcul de  $J$  pour de grandes valeurs de l'indice ou de l'argument, reportez-vous par exemple au livre de Press et coll. En gros, il faut

calculer  $J_0$  et  $J_1$  à partir de leurs développements en série,  $J_n(x)$ ,  $n < x$ , par récurrence et  $J_n(x)$ ,  $n > x$ , à l'aide de son développement asymptotique.

Appliquer le théorème de Babinet pour montrer que l'intensité diffractée par un disque opaque vaut

$$\frac{I_2(y, z)}{I_0} = V_0^2(y, z) + V_1^2(y, z)$$

et calculer cette intensité. Vous devez trouver un résultat proche de la figure 2.7.



**Figure 2.7** – Diffraction de Fresnel par un disque. Remarquer la « tache de Poisson » au centre de l'ombre géométrique.

### Projet 3. Champ magnétique d'une boucle de courant

Une spire de rayon  $a$ , centrée à l'origine dans le plan  $xOy$  (voir fig. 2.8), parcourue par un courant  $I$ , crée, au point  $M$  de coordonnées cylindriques  $r, z$ , une induction donnée par les formules suivantes

$$\begin{cases} B_z &= \frac{B_0}{\pi\sqrt{Q}} \left[ E(k) \frac{1 - \rho^2 - \zeta^2}{(1 - \rho)^2 + \zeta^2} + K(k) \right], \\ B_r &= \frac{B_0}{\pi\sqrt{Q}} \frac{z}{r} \left[ E(k) \frac{1 + \rho^2 + \zeta^2}{(1 - \rho)^2 + \zeta^2} - K(k) \right] \end{cases}$$

avec :

$$\rho = r/a, \quad \zeta = z/a, \quad Q = (1 + \rho)^2 + \zeta^2, \quad k = \sqrt{\frac{4\rho}{Q}}, \quad B_0 = \frac{\mu_0 I}{2a}.$$

- a) Le calcul des « intégrales elliptiques complètes »  $E(k), K(k)$  se fait commodément par l'algorithme dit de la moyenne arithmético-géométrique de Gauss. Étant donnés trois nombres  $a_0, b_0, c_0$ , on applique les relations de récurrence suivantes

Listing 4.1 – Calcul du polynôme de Lagrange de degré 3 (4 pivots)

```

x = linspace(xmin, xmax, npts);
pl = zeros(1, npts);
for i = 1:4
    L(i, 1:npts) = ones(1, npts);
    for k = 1:4
        if k < i
            L(i, :) = L(i, :) .* (x - xp(k)) / (xp(i) - xp(k));
        end
    end
    L(i, :) = L(i, :) * fn(xp(i));
    pl = pl + L(i, :);
end

```

Les deux premières instructions créent un vecteur d'abscisses et un vecteur de zéros, lequel va recevoir les valeurs successives du polynôme d'interpolation. À la ligne 4, nous remplissons la ligne  $i$  de la matrice  $L$  par des 1. Le gros du travail est fait ligne 7, où nous calculons, à l'aide d'une itération, les valeurs du polynôme élémentaire  $\ell_i$ , pour toutes les abscisses simultanément. Nous avons utilisé ce programme pour interpoler la fonction  $e^x$  sur les pivots d'abscisses  $[0, 5; -1; 1, 5; 2]$ . La figure 4.1 montre le résultat. Nous avons représenté chacune des quantités  $\ell_i(x)f(x_i)$ , ainsi que leur somme  $p(x)$ . Vous pouvez vérifier que les  $\ell_i(x)f(x_i)$  passent par un pivot et un seul, alors que  $p(x)$  passe par tous les noeuds.

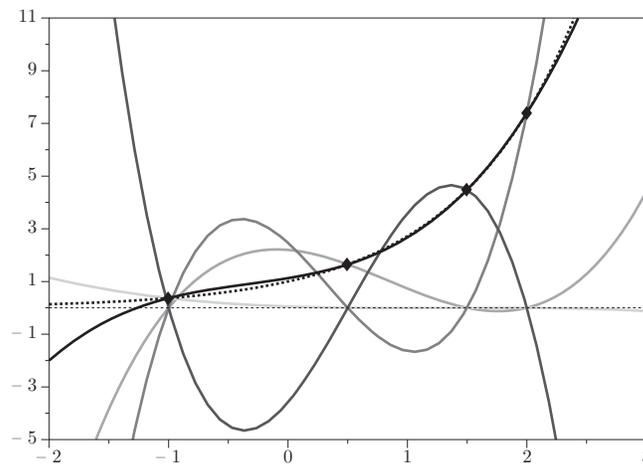


Figure 4.1 – Interpolation de Lagrange.

Cependant, il serait pénible de développer le polynôme de Lagrange et de regrouper les termes pour le mettre sous la forme d'une somme ordonnée selon les puissances de  $x$ . Si l'on souhaite vraiment obtenir cette forme, il vaut mieux utiliser un algorithme dû à Newton, la méthode des différences divisées.

Le polynôme de Newton d'ordre 3 s'écrit alors

$$p_{0,1,2,3} = 0,367879 + (x - 0,5)0,853895 + (x - 0,5)(x - 1,5)0,791629 \\ + (x - 0,5)(x - 1,5)(x - 2)0,398738.$$

Listing 4.2 – Calcul du polynôme de Newton

```

//creation d'une serie de valeurs 1
x = [0.5, -1.0, 2.0, 1.5]; 2
y = exp(x); 3
neff = input("ordre de l interpolation (<= 3: "); 4
//calcul des differences 5
for i = 1:neff+1 6
    t(i) = y(i); 7
    for j = i-1:-1:1 8
        t(j) = (t(j+1) - t(j))/(x(i) - x(j)); 9
    end 10
    a(i) = t(1); 11
end 12
//calcul du polynome 13
pol = a(neff+1); 14
z = linspace(-2,3); 15
for i = neff:-1:1 16
    pol = pol.*(z-x(i))+a(i); 17
end 18
plot2d(z', [pol', exp(z)']) 19

```

Sa forme, très semblable à celle de Horner, rend le calcul facile pour toute valeur de  $x$ . Le listing ci-dessus montre un programme Scilab qui accomplit la même tâche. La figure 4.2 illustre le résultat ; comme le polynôme d'interpolation est unique, le résultat final est indiscernable de celui du paragraphe précédent.

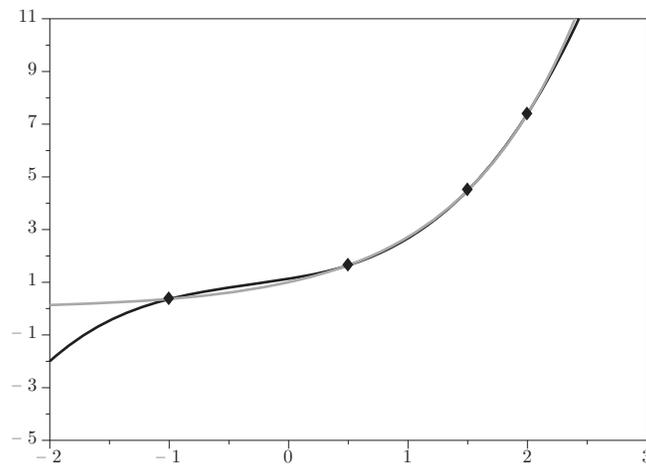


Figure 4.2 – Interpolation par la méthode de Newton.

L'algorithme (6.21) admet une représentation matricielle commode pour les analyses théoriques. Décomposons  $\mathbf{A}$  en une **somme** de trois matrices (qui n'ont rien à voir avec les  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{U}$  des paragraphes précédents) :

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$$

où  $\mathbf{D}$  est diagonale,  $\mathbf{L}$  strictement triangulaire inférieure et  $\mathbf{U}$  strictement triangulaire supérieure (et donc  $a_{ii} = d_{ii}, \ell_{ii} = u_{ii} = 0, 1 \leq i \leq n$ ). Comme  $\mathbf{D}$  est diagonale, son inverse est également diagonale et ses éléments s'écrivent  $[\mathbf{D}^{-1}]_{ii} = 1/d_{ii} = 1/a_{ii}$ . Les équations (6.21) peuvent alors se résumer en

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}. \quad (6.23)$$

**Exemple** – Étant donné le système linéaire ci-dessous et le vecteur initial  $(0, 0)^T$  :

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -x + 2y = -2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = (1/3)(2 - y) \\ y = \frac{1}{2}(x - 2) \end{cases},$$

nous trouvons la suite de solutions approchées suivante :

$x$	2/3	1	8/9	5/6	23/27	31/36	139/162
$y$	-1	-2/3	-1/2	-5/9	-7/12	-31/54	-41/72

qui converge effectivement mais lentement vers la solution exacte  $(6/7, -4/7)^T$ . Le code suivant résout un système linéaire par la méthode itérative de Jacobi.

Listing 6.4 – Méthode de Jacobi pour les systèmes linéaires

```

// ... lecture de seuil , kmax , n , A et b ...
//initialisation
x = ones(n,1);
//resolution
for k = 1:kmax
    for i = 1:n
        s = b(i) - A(i,:) * x;
        y(i) = x(i) + s/A(i,i);
    end
    if max(abs(y-x)) < seuil , break , end
    x = y;
end
//affichage
k , x' , (A*x - b) ,

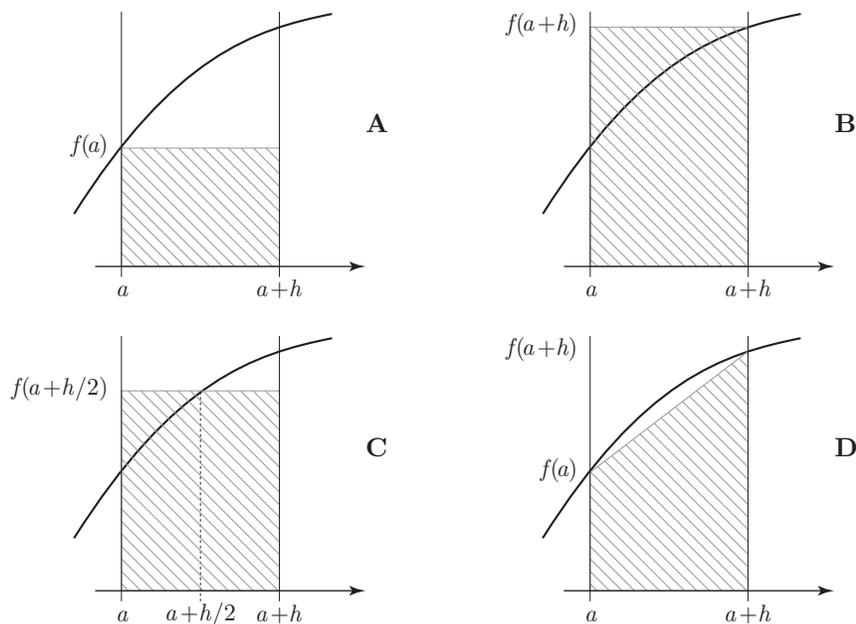
```

À chaque tour dans la boucle,  $\mathbf{x}$  contient l'ancienne valeur  $x^{(k)}$  et  $\mathbf{y}$  contient la nouvelle valeur  $x^{(k+1)}$  du vecteur inconnu. Plutôt que d'utiliser directement (6.21), il est commode de calculer  $\sum_1^n a_{ij}x_j^{(n)}$  (ligne 7). Cela revient à calculer une composante du produit  $\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}$ , celle-ci contient un terme de trop, ce que nous corrigeons à la ligne suivante (ligne 8).

La méthode de Jacobi converge lentement, mais nous pouvons facilement modifier cet algorithme pour le rendre plus rapide.

## 8.5. MÉTHODES ÉLÉMENTAIRES D'INTÉGRATION

La figure 8.1 présente quatre méthodes d'intégration simples.



**Figure 8.1** – Principe de quatre méthodes simples de quadrature numérique.

A : point gauche ou rectangle à droite, B : point droit ou rectangle à gauche,  
C : « point milieu », D : trapèzes.

(A) (resp. (B)) représente ce que l'on peut appeler la méthode du point gauche (resp. point droit). L'intégrale (l'aire algébrique comprise entre le graphe de  $f$ , l'axe  $Ox$  et les deux verticales d'abscisses  $a$  et  $a+h$ ) est approchée par l'aire du rectangle de même base et de hauteur  $f(a)$  (resp.  $f(a+h)$ )

$$\int_a^{a+h} f(x)dx \cong hf(a) \cong hf(a+h).$$

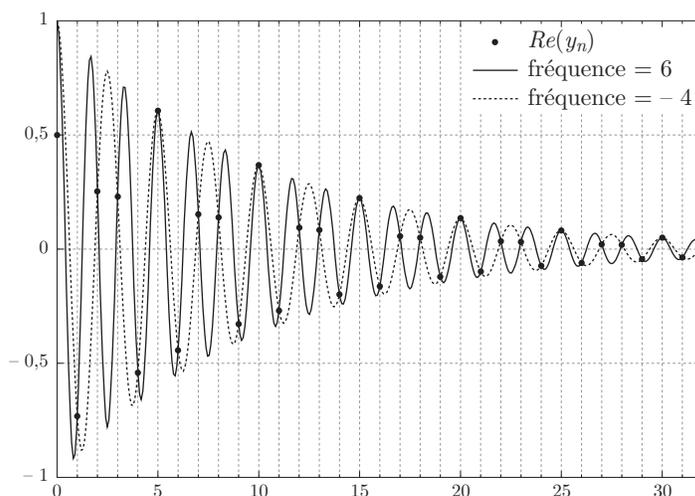
Le théorème de Taylor va nous permettre de borner l'erreur, par exemple dans le cas du rectangle à droite. Il s'écrit

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(\xi)$$

où  $\xi$  est un point (fonction de  $x$ ) de l'intervalle  $[a, x]$ . Intégrons cette expression entre  $a$  et  $a+h$ .

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \int_a^{a+h} f(a)dx + \int_a^{a+h} (x-a)f'(\xi)dx.$$

Surprise ! La TFD étant périodique (de période 10 ici), elle présente un maximum à l'abscisse  $s = 6 - 10 = -4$ . Toute fonction  $y$  de fréquence extérieure à l'intervalle  $[-5 : 5]$  sera traitée de la même façon : sa TFD subira des translations de  $\pm 10$  en nombre suffisant pour apparaître sur le segment  $[-5 : 5]$ . Ce comportement est appelé « aliasing » en anglais : une fréquence supérieure en valeur absolue à  $s_{Ny}$  acquiert un « pseudonyme » qui la représente. Ce déguisement de fréquence se comprend plus facilement dans l'espace des  $x$ , où il apparaît comme une conséquence directe de la numérisation. La figure 9.11 illustre ce propos. Elle représente les échantillons d'une sinusoïde amortie de fréquence 6, comme précédemment. Nous avons superposé à ces points une courbe en trait plein qui représente la fonction  $y = \Re[e^{-x+12i\pi x}]$  et une courbe en pointillé d'équation  $y = \Re[e^{-x-8i\pi x}]$ . Comme vous le voyez, ces deux fonctions produisent la même séquence de valeurs de  $y_n$ . Vous constatez aussi que la fonction représentée en trait plein ne respecte pas les conditions du théorème de Shannon : elle admet moins de deux échantillons par période ; c'est le contraire pour la fonction tracée en pointillé. Encore une fois, une suite de valeurs discrètes ne détermine pas complètement la fonction continue dont elle est issue.



**Figure 9.11** – Deux fonctions ayant la même suite d'échantillons.

Dans la pratique, on doit souvent calculer la TFD de fonctions compliquées présentant un spectre très large. Il faut alors adopter une période d'échantillonnage très courte et donc accumuler énormément d'échantillons ou exclure par filtrage, avant numérisation, les composantes rapidement variables.

Vous trouverez dans les ouvrages spécialisés, les énoncés de nombreuses autres propriétés de la TFD. Elles sont en général des transpositions des théorèmes correspondants qui s'appliquent à la TF.

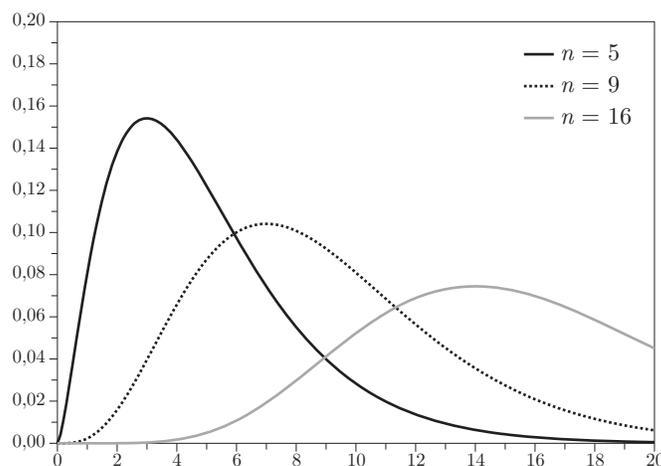
Listing 14.1 – Calcul de la densité de probabilité pour le  $\chi^2$ 

```

def ("y = chi2(x,n)",
      "y = x.^(n/2-1).*exp(-x/2)/(2^(n/2)*gamma(n/2))")
1
2
3
xmax = 20; npt = 200;
4
x = linspace(0,xmax,npt);
5
6
a = gca();
7
plot2d(x,chi2(x,5),rect = [0,0,xmax,0.2]);
8
plot2d(x,chi2(x,9),2,"000")
9
plot2d(x,chi2(x,16),5,"000")
10
11
h1 = legend(['n = 5'; 'n = 9'; 'n = 16'])
12

```

Vous pourrez montrer sans calcul que  $\mu_X = n$  et que  $\sigma_X^2 = 2n$ . La figure 14.5 montre trois exemples de la loi du  $\chi^2$ .



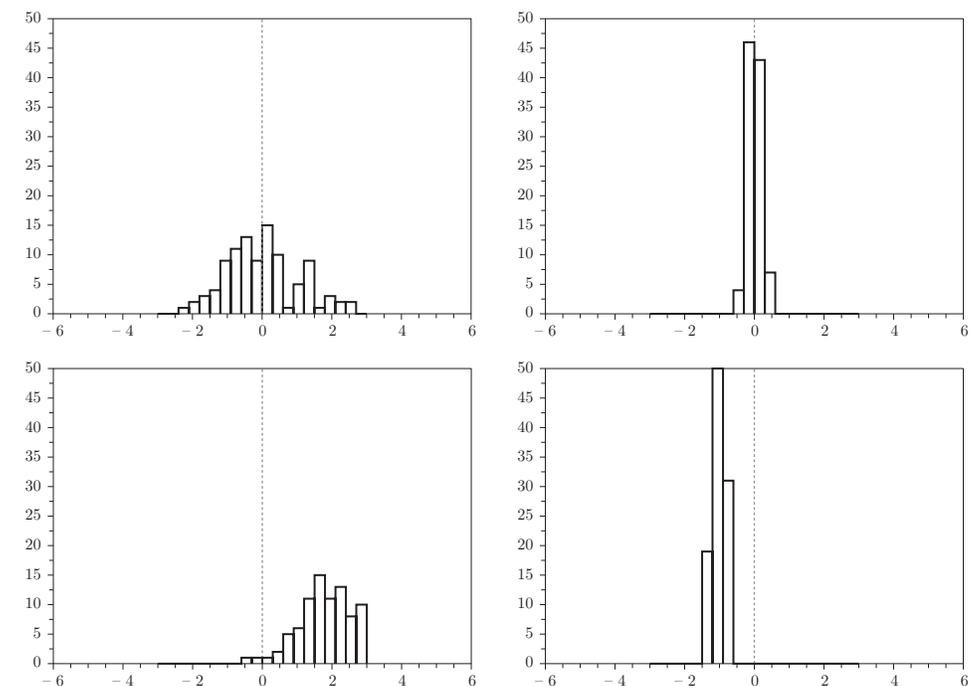
**Figure 14.5** – Densité de probabilité pour la loi du  $\chi^2$  à 5, 9 ou 16 degrés de liberté.

On utilise beaucoup plus souvent la fonction de répartition  $P(\chi^2, n) \equiv \text{Proba}(X \leq \chi^2)$  ou la fonction complémentaire  $Q(\chi^2, n) \equiv \text{Proba}(X \geq \chi^2) = 1 - P$ , que l'on trouve tabulées dans les ouvrages de statistique.

#### 14.2.6. PARAMÈTRES DE LA LOI DE PROBABILITÉ ET PARAMÈTRES DE L'ÉCHANTILLON

Dans la pratique, nous disposons d'un certain nombre  $n$  d'observations d'une grandeur  $Y$ , réparties au hasard. L'ensemble des  $y_i$  constitue un échantillon extrait de la « population » de toutes les valeurs possibles de  $Y$ . La variable aléatoire  $Y$  obéit à une certaine loi de probabilité  $p(y)$ , à laquelle sont associées une moyenne  $\mu$  et un écart-type  $\sigma$ . Nous n'aurons jamais connaissance de ces paramètres, mais nous

La figure 14.7 illustre les notions de justesse (absence de biais) et de précision (dispersion ou bruit faible). Nous imaginons que nous avons fait de nombreuses (100) mesures d'une même grandeur et nous avons représenté nos résultats sous forme d'histogramme. Nous supposons aussi que nous connaissons la valeur exacte de la quantité à mesurer (prise ici égale à zéro) : il s'agit bien sûr d'un artifice pédagogique.



**Figure 14.7** – Justesse et précision d'une série de mesures. De haut en bas et de gauche à droite : mesures justes et imprécises, mesures justes et précises, mesures biaisées et imprécises, mesures biaisées et précises.

Dans les paragraphes qui suivent, nous considérerons a priori que nous disposons de mesures parfaitement justes, seulement affectées d'erreurs aléatoires. Cette situation permet de faire des prédictions assez simples. Le résultat d'une mesure est considéré comme le résultat du tirage d'une variable aléatoire, superposition de la valeur « vraie » (non fluctuante ou certaine) et de l'erreur ; nous supposons que les erreurs sont additives, c'est-à-dire qu'un résultat  $Y$  est la somme de la valeur vraie inconnue  $y$  et d'une erreur  $\epsilon$  :  $Y = y + \epsilon$ . Ce n'est pas toujours le cas. Lorsque nous mesurons l'absorbance d'une solution à l'aide d'un spectromètre dont la source lumineuse a une fréquence fluctuante, nous sommes confrontés à une erreur non additive ; la théorie correspondante ne sera pas abordée ici.