EXTRAITS

Petit traité d'intégration

Riemann, Lebesgue et Kurzweil-Henstock

Grenoble Sciences

Grenoble Sciences est un centre de conseil, expertise et labellisation de l'enseignement supérieur français. Il expertise les projets scientifiques des auteurs dans une démarche à plusieurs niveaux (référés anonymes, comité de lecture interactif) qui permet la labellisation des meilleurs projets après leur optimisation. Les ouvrages labellisés dans une collection de Grenoble Sciences ou portant la mention « Sélectionné par Grenoble Sciences » *(Selected by Grenoble Sciences)* correspondent à :

- des projets clairement définis sans contrainte de mode ou de programme,
- des qualités scientifiques et pédagogiques certifiées par le mode de sélection (les membres du comité de lecture interactif sont cités au début de l'ouvrage),
- une qualité de réalisation assurée par le centre technique de Grenoble Sciences.

Directeur scientifique de Grenoble Sciences
Jean Bornarel, Professeur émérite à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1

Pour mieux connaître Grenoble Sciences :
https://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr

Pour contacter Grenoble Sciences :
tél : (33) 4 76 51 46 95, e-mail : *grenoble.sciences@ujf-grenoble.fr*

Livres et pap-ebooks

Grenoble Sciences labellise des livres papier (en langue française et en langue anglaise) mais également des ouvrages utilisant d'autres supports. Dans ce contexte, situons le concept de pap-ebook. Celui-ci se compose de deux éléments :

- un **livre papier** qui demeure l'objet central avec toutes les qualités que l'on connaît au livre papier
- un **site web compagnon** qui propose :
  - des éléments permettant de combler les lacunes du lecteur qui ne posséderait pas les prérequis nécessaires à une utilisation optimale de l'ouvrage,
  - des exercices pour s'entraîner,
  - des compléments pour approfondir un thème, trouver des liens sur internet, etc.

Le livre du pap-ebook est autosuffisant et certains lecteurs n'utiliseront pas le site web compagnon. D'autres l'utiliseront et ce, chacun à sa manière. Un livre qui fait partie d'un pap-ebook porte en première de couverture un logo caractéristique et le lecteur trouvera la liste de nos sites compagnons à l'adresse internet suivante :

https://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr/pap-ebook

Grenoble Sciences bénéficie du soutien de la **région Rhône-Alpes** et du **ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche**.
Grenoble Sciences est rattaché à l'**Université Joseph Fourier** de Grenoble.

ISBN 978 2 7598 1241 7

Petit traité d'intégration

Riemann, Lebesgue et Kurzweil-Henstock

Jean-Yves Briend

edp sciences

17, avenue du Hoggar
Parc d'Activité de Courtabœuf - BP 112
91944 Les Ulis Cedex A - France

Petit traité d'intégration
Riemann, Lebesgue et Kurzweil-Henstock

Cet ouvrage, labellisé par Grenoble Sciences, est un des titres du secteur Mathématiques de la collection Grenoble Sciences d'EDP Sciences, qui regroupe des projets originaux et de qualité. Cette collection est dirigée par Jean Bornarel, Professeur émérite à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Comité de lecture :

- Claude Bardos, Professeur émérite à l'Université Paris-Diderot, Paris 7
- Elie Belorizky, Professeur émérite à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1
- Eric Charpentier, Maître de conférences à l'Université de Bordeaux
- Jean-Pierre Demailly, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1
- Bruno Demange, Maître de conférences à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1
- Denise Grenier, Maître de conférences à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1

Cet ouvrage a été suivi par Stéphanie Trine. Mise en page : ArchiTEX ; figures : Sylvie Bordage et Anne-Laure Passavant ; illustration de couverture : Alice Giraud, d'après une figure de Emes2k/de.wikipedia.

Autres ouvrages labellisés sur des thèmes proches (chez le même éditeur) :

Analyse numérique et équations différentielles (J.-P. Demailly) • Exercices corrigés d'analyse avec rappels de cours. Tomes I et II (D. Alibert) • Nombres et algèbre (J.-Y. Mérindol) • Mécanique. De la formulation lagrangienne au chaos hamiltonien (C. Gignoux & B. Silvestre-Brac) • Problèmes corrigés de mécanique et résumés de cours. De Lagrange à Hamilton (C. Gignoux & B. Silvestre-Brac) • Méthodes numériques appliquées pour le scientifique et l'ingénieur (J.-P. Grivet) • Introduction aux variétés différentielles (J. Lafontaine) • Description de la symétrie. Des groupes de symétrie aux structures fractales (J. Sivardière) • Symétrie et propriétés physiques. Des principes de Curie aux brisures de symétrie (J. Sivardière) • Approximation hilbertienne. Splines, ondelettes, fractales (M. Attéia & J. Gaches) • Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et ingénieurs (E. Belorizky) • Analyse statistique des données expérimentales (K. Protassov) • Mathématiques pour l'étudiant scientifique. Tomes I et II (P.-J. Haug) • Mathématiques pour les sciences de la Vie, de la Nature et de la Santé (J.-P. Bertrandias & F. Bertrandias) • Introduction à la mécanique statistique (E. Belorizky & W. Gorecki) • Mécanique statistique. Exercices et problèmes corrigés (E. Belorizky & W. Gorecki) • Magnétisme : I Fondements, II Matériaux (sous la direction d'E. du Trémolet de Lacheisserie) • La mécanique quantique. Problèmes résolus. Tomes I et II (V.M. Galitski, B.M. Karnakov & V.I. Kogan) • Éléments de Biologie à l'usage d'autres disciplines. De la structure aux fonctions (P. Tracqui & J. Demongeot) • Minimum Competence in Scientific English (S. Blattes, V. Jans & J. Upjohn)

et d'autres titres sur le site internet
https://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr

L'idée la plus simple, pour calculer cette aire de manière approchée, est de découper la région R en rectangles verticaux, choisis, dans un premier temps *au pif.* Soyons simplistes et un peu fainéants : contentons nous de trois rectangles, basés respectivement sur les intervalles $\mathrm{I}_1 = [a = x_0, x_1], \mathrm{I}_2 = [x_1, x_2], \mathrm{I}_3 = [x_2, x_3 = b]$. Choisissons un point dans chacun de ces intervalles : $t_1 \in \mathrm{I}_1, t_2 \in \mathrm{I}_2$ et $t_3 \in \mathrm{I}_3$, et dessinons des rectangles de base I_j, de hauteur $f(t_j)$ (*voir* la figure 2.2).

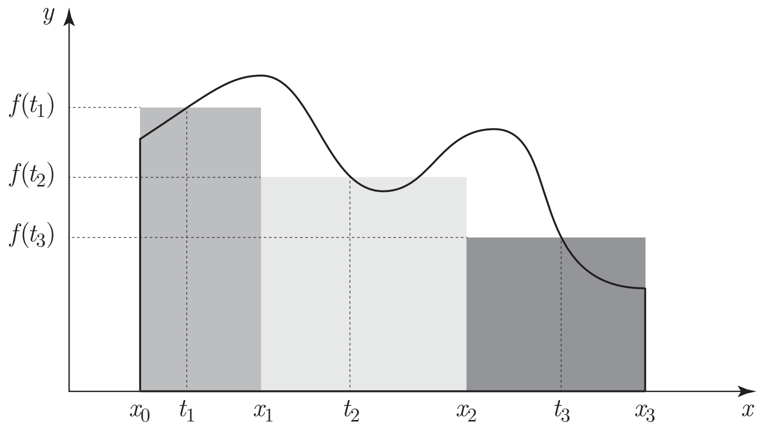

Figure 2.2 – Approximation de l'aire A par des rectangles

Nous obtenons ainsi trois rectangles d'aires respectives

$$\mathrm{A}_1 = (x_1 - x_0)f(t_1),\ \mathrm{A}_2 = (x_2 - x_1)f(t_2) \text{ et } \mathrm{A}_3 = (x_3 - x_2)f(t_3),$$

soit une approximation de l'aire de la région R par la somme

$$\mathrm{A} \approx \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_3 = \sum_{k=1}^{3}(x_k - x_{k-1})f(t_k) = \sum_{k=1}^{3} |\mathrm{I}_k| f(t_k),$$

où l'on a noté $|\mathrm{I}_k|$ la *longueur* de l'intervalle I_k. Nous venons de définir deux notions qui seront centrales dans toute la suite de ce cours, à savoir celle de *subdivision pointée* (la famille des intervalles $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$ et le choix d'un point t_j dans chacun des I_j), et celle de *somme de Riemann* (la somme $\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_3$) associée à cette subdivision.

Définition 2.1 — *Soit* $\mathrm{I} = [a, b]$ *un intervalle compact. Une subdivision pointée* $\mathcal{P}$ *de* I *est la donnée d'une subdivision* $\mathrm{I}_1 = [x_0, x_1], \mathrm{I}_2 = [x_1, x_2], \dots, \mathrm{I}_n = [x_{n-1}, x_n]$ *de* I *(avec* $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \dots \leqslant x_n = b$*) et d'un « pointage » de cette partition, c'est-à-dire de points* $t_1 \in \mathrm{I}_1, \dots, t_n \in \mathrm{I}_n$*. On la notera* $\mathcal{P} = \{(\mathrm{I}_1, t_1), \dots, (\mathrm{I}_n, t_n)\}$*, et on appellera les* t_i *des points de marquage de* $\mathcal{P}$*.*

Notons au passage que les subdivisions que nous considérerons seront toujours supposées ordonnées par l'ordre usuel de **R**. Les subdivisions pointées de l'intervalle $[a, b]$

Nous aurions ainsi trouvé *exactement* la formule du théorème 1 ! Bien sûr, comme nous parlons d'approximation, il est insensé de croire que la situation $c_k = t_k$ puisse réellement avoir lieu, sauf dans le cas où f est affine.

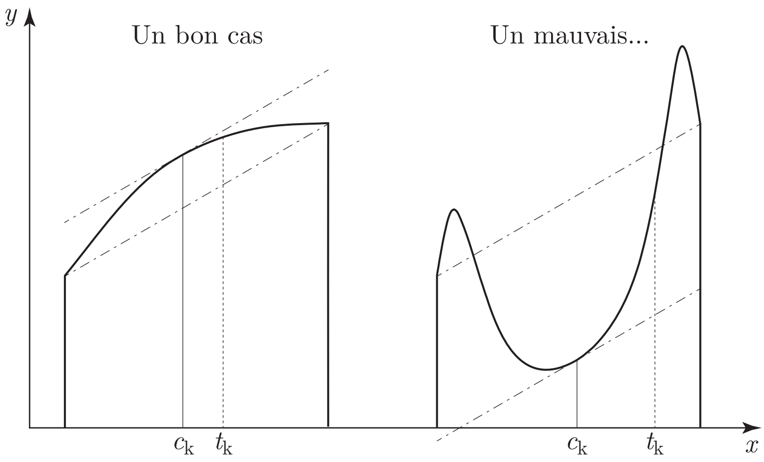

Figure 2.3 – Deux cas de la formule des accroissements finis

Dans tous les autres cas, nous ne pouvons espérer qu'une seule chose : qu'en prenant les intervalles I_k suffisamment petits, les points c_k et t_k soient tellement proches que l'on ait alors $f'(c_k) \approx f'(t_k)$. Cela donne une première idée pour définir l'intégrale de f' : ce serait la limite, si elle existe, des sommes de Riemann $\mathrm{S}(f', \mathcal{P})$, quand on prend des subdivisions de pas de plus en plus petit. On pourrait par exemple prendre pour sommets des intervalles les nombres du type $a + j(b-a)2^{-l}, j = 0, \ldots, 2^l$, c'est à dire découper $[a, b]$ en 2^l intervalles de longueur égale, et ensuite faire tendre l vers l'infini. Mais ce n'est, *a priori*, pas suffisant : cela est illustré par la figure 2.3. Dans le premier cas, le « bon », prendre t_k différent de c_k donnera une bonne approximation de

$$(x_k - x_{k-1})f'(c_k) = f(x_k) - f(x_{k-1})$$

par

$$(x_k - x_{k-1})f'(t_k),$$

car f' (c.-à-d. la pente du graphe) varie peu dans l'intervalle. Mais, dans le second, un choix malencontreux de t_k (par exemple en un point où la dérivée de f prend une valeur beaucoup plus grande que l'accroissement entre x_{k-1} et x_k comme c'est le cas sur la figure ci-dessus) donnera une approximation déplorable. Il existe des fonctions f dérivables, dont la dérivée varie au voisinage de certains points si fortement que l'usage d'intervalles de longueur constante ne permet pas de faire converger les sommes de Riemann vers une limite. Il faut assouplir le processus de passage à la limite et s'autoriser à *adapter* la longueur des intervalles des subdivisions en fonction des variations locales de f'. Ces considérations nous mènent tout naturellement aux deux définitions suivantes, celle de *jauge* et celle de subdivision δ-*fine* :

Chapitre 3
Fonctions intégrables, intégrale

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, les notions de subdivision pointée, de somme de Riemann, ainsi que de subdivision δ-fine pour une jauge δ sur $[a, b]$. Nous sommes maintenant en mesure de définir la notion d'intégrale et d'intégrabilité :

Définition 2 — *Soit f une fonction numérique définie sur $[a, b]$. La fonction f est dite intégrable sur $[a, b]$ s'il existe un nombre réel S tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ_ε sur $[a, b]$ telle que, pour toute subdivision δ_ε-fine $\mathcal{P}$, on ait*

$$|\mathrm{S}(f, \mathcal{P}) - \mathrm{S}| < \varepsilon.$$

On notera $\mathcal{I}([a, b])$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $[a, b]$. Le nombre S ci-dessus est appelé intégrale de la fonction f sur $[a, b]$ et est noté

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{ou encore} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \textit{voire} \quad \int_{[a,b]} f \quad \textit{ou} \quad \int_a^b f.$$

La stratégie pour démontrer qu'une fonction donnée est intégrable est alors claire : on se fixe un réel $\varepsilon > 0$ et l'on cherche à construire la jauge δ_ε. Nous allons voir dans un instant, sur des exemples, que cela marche très bien pour un grand nombre de fonctions, comme les polynômes par exemple. Mais il nous faut tout d'abord régler un « détail » : si jamais il existait une jauge δ n'admettant pas de subdivision δ-fine, alors toute fonction serait intégrable et n'importe quelle nombre serait son intégrale !

3.1. Le lemme de Cousin

Cette chausse-trape est heureusement évitée grâce au lemme suivant, dit lemme de Cousin :

Lemme 3.1 — *Pour toute jauge $\delta > 0$ sur $[a, b]$, il existe une subdivision δ-fine.*

Il est bien évident que toute fonction Riemann-intégrable est intégrable, mais nous allons voir dans un instant que la réciproque est fausse : les fonctions intégrables au sens de Riemann doivent présenter une certaine uniformité dans leurs variations locales. Cependant l'intégrabilité au sens de Riemann est souvent suffisante, en particulier lorsque l'on fait du calcul intégral en relation avec le calcul différentiel (où l'on calcule des primitives de fonctions continues, qui sont Riemann-intégrables). C'est lorsque l'on a besoin d'outils d'analyse plus puissants comme de théorèmes de convergence suffisamment généraux pour traiter confortablement les procédés d'approximation classiques (séries de Fourier, par exemple) que l'intégrale de Riemann devient insuffisante. Mais donnons immédiatement l'exemple d'une fonction qui est intégrable mais pas Riemann-intégrable.

Soit $\chi : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction de Dirichlet, ou fonction indicatrice des nombres rationnels :

$$\chi(x) = 1 \text{ si } x \in \mathbf{Q} \cap [0,1], \quad \chi(x) = 0 \text{ sinon.}$$

Montrons que χ est intégrable, d'intégrale nulle. Pour cela, remarquons que $\mathrm{D} = \mathbf{Q} \cap [0,1]$ est *dénombrable,* car $\mathbf{Q}$ lui-même est dénombrable. On peut donc énumérer D en $\mathrm{D} = \{r_1, r_2, \ldots\}$. Fixons $\varepsilon > 0$ et définissons la jauge δ_ε par

$$\begin{cases} \delta_\varepsilon(x) = 1 \text{ si } x \notin \mathrm{D} \\ \delta_\varepsilon(x) = \varepsilon 2^{-j} \text{ si } x = r_j, \ j = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

L'idée derrière la définition de cette jauge est la suivante (nous la retrouverons constamment) : si x n'est pas dans D, alors $\chi(x) = 0$ et si (I_k, x) apparaît dans une subdivision pointée, la contribution à la somme de Riemann est nulle, et ce quelle que soit la longueur de I. C'est pourquoi on pose $\delta(x) = 1$, mais on pourrait prendre n'importe quel nombre strictement positif. Si par contre x est élément de D et (I_k, x) apparaît dans une subdivision, alors $\chi(x) = 1$, et il faut compenser cela en imposant à la longueur de I_k d'être toute petite, ici suffisamment petite pour que la somme $|\mathrm{I}_1| + |\mathrm{I}_2| + \cdots$ des longueurs converge et soit inférieure à ε.

Ainsi, soit $\mathcal{P} = \{(\mathrm{I}_k, t_k), 1 \leqslant k \leqslant n\}$ une subdivision δ_ε-fine. Alors $\chi(t_k)|\mathrm{I}_k| = 0$ si $t_k \notin \mathrm{D}$ et $\chi(t_k)|\mathrm{I}_k| = \varepsilon 2^{-j}$ si $t_k = r_j$ et donc

$$0 \leqslant \mathrm{S}(\chi, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \chi(t_k)|\mathrm{I}_k| \leqslant \varepsilon \sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-j} \leqslant \varepsilon\,;$$

la fonction χ est intégrable, d'intégrale nulle.

Elle n'est cependant pas intégrable au sens de Riemann. En voici succinctement la raison. Si $\mathcal{P} = \{(\mathrm{I}_k, t_k)\}$ est une subdivision δ-fine, pour une jauge *constante* δ, alors les subdivisions déduites de $\mathcal{P}$ en gardant les intervalles I_k mais en perturbant légèrement les points de marquage t_k sont encore δ-fines. Comme D et $[0,1] - \mathrm{D}$ sont denses dans $[0,1]$, on peut trouver des partitions δ-fines telles que tous les t_k soient hors de D et d'autres telles que tous soient dans D. Ainsi, pour toute constante $\delta > 0$, il existe des partitions δ-fines telles que $\mathrm{S}(f, \mathcal{P}) = 0$ et d'autres telles que $\mathrm{S}(f, \mathcal{P}) = 1 > 0$. En fait, en choisissant bien les intervalles et leurs points de marquage, on peut obtenir à la limite toute valeur entre 0 et 1. La fonction χ ne peut donc être Riemann-intégrable.

Chapitre 4

Propriétés élémentaires de l'intégrale

Dans ce chapitre nous allons démontrer les propriétés les plus simples de l'intégrale, indispensables pour poursuivre son étude. Nous allons pour cela commencer par démontrer un critère d'intégrabilité extrêmement utile, le *critère de Cauchy*.

4.1. Critère de Cauchy, applications

L'intégrale est définie par un processus de passage à la limite. Jusqu'à maintenant, nous avons démontré des résultats d'intégrabilité pour des fonctions dont nous connaissions, *a priori*, le caractère intégrable et la valeur de l'intégrale. Pour démontrer des résultats plus généraux, il est indispensable de disposer d'un critère d'intégrabilité qui ne fasse pas appel à la valeur de l'intégrale. Pour la convergence des suites de nombres réels (et plus généralement d'éléments d'un espace complet), un tel critère existe, c'est le critère de Cauchy. Celui-ci permet souvent de démontrer qu'une suite converge sans que l'on connaisse *a priori* sa limite. Nous disposons, dans le cadre de l'intégrale, d'un outil analogue : nous l'appellerons encore critère de Cauchy.

Théorème 4.1 — *Une fonction* $f : \mathrm{I} = [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ *est intégrable si, et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe une jauge* δ_ε *telle que, si* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{Q}$ *sont deux subdivisions* δ_ε*-fines, alors*

$$|\mathrm{S}(f, \mathcal{P}) - \mathrm{S}(f, \mathcal{Q})| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration — Si f est intégrable, fixons $\varepsilon > 0$ et trouvons une jauge δ telle que pour toutes subdivisions δ-fines $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, on ait

$$\left|\mathrm{S}(f, \mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} f\right| \leqslant \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \left|\mathrm{S}(f, \mathcal{Q}) - \int_{\mathrm{I}} f\right| \leqslant \varepsilon/2.$$

5.2.4. Applications de la formule de changement de variable

Commençons par rappeler un moyen mnémotechnique utile dans l'utilisation de la formule de changement de variable. Si l'on pose $x = \varphi(t)$, alors on obtient $\mathrm{d}x$ par la formule $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Un premier exemple amusant

Essayons de déterminer une primitive de

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}.$$

On remarque que l'on a les mêmes quantités sous les radicaux. On va donc essayer de s'en débarrasser en exprimant ces deux radicaux comme puissances d'une même quantité. Le ppcm de 2 (pour la racine carrée) et 3 est 6. Ainsi on a

$$(\sqrt[6]{1+x})^2 = \sqrt[3]{1+x} \text{ et } (\sqrt[6]{1+x})^3 = \sqrt{1+x}.$$

On s'empresse donc de faire le changement de variable $y = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{1/6}$. Comme $y^6 = 1+x$, il vient $\mathrm{d}x = 6y^5\,\mathrm{d}y$, et donc

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{6y^5}{y^3+y^2}\,\mathrm{d}y,$$

et cette dernière intégrale se calcule facilement. On commence par effectuer une division euclidienne de y^5 par y^3+y^2, ce qui donne

$$y^5 = (y^2-y+1)(y^3+y^2) - y^2,$$

soit

$$\frac{y^5}{y^3+y^2} = y^2 - y + 1 - \frac{1}{y+1},$$

et il sort alors de tout ça le merveilleux résultat suivant :

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + 6\sqrt[6]{1+x} - 6\,\mathrm{Log}\,|1+\sqrt[6]{1+x}| + \mathrm{C}.$$

Il ne faut pas oublier, à la fin du calcul, de revenir à la variable x en remplaçant partout y par sa valeur.

Deuxième exemple

Cet exemple donne en fait une méthode générale de calcul des primitives de fractions rationnelles en *sinus* et *cosinus*. Soient P et Q deux polynômes de deux variables, à coefficients réels. On cherche à intégrer une fonction de la forme $\mathrm{P}(\cos x, \sin x)/\mathrm{Q}(\cos x, \sin x)$, et pour cela on rappelle les formules de trigonométrie suivantes : si l'on pose $t = \tan(x/2)$, alors

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Chapitre 6

Intégrales impropres

Intégrer des fonctions définies sur des intervalles compacts s'avère très vite insuffisant, tant en mathématiques (arithmétique, analyse...) qu'en physique. On y est en effet confronté à des intégrales du type

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \text{voire} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Or la première fonction intégrée n'est pas définie en 0, ni bornée sur $[0,1]$, tandis que les deux autres intégrale font intervenir un intervalle non borné. Nous allons voir, dans cette section, que l'on peut étendre la définition de l'intégrale de manière à prendre en compte ces deux situations. De plus, nous énoncerons un théorème dû à Heinrich Hake, qui dit que l'intégrale de Kurzweil et Henstock contient ses intégrales impropres (c.-à-d. obtenues par passage à la limite dans les bornes).

Nous ne donnerons que peu de preuves ici, et nous bornerons le plus souvent à donner les énoncés des résultats les plus importants. En fait, tout marche comme dans le cas de l'intégration des fonctions définies sur un compact, quasiment mot pour mot. Enfin, nous nous limiterons à un intervalle de la forme $[a,+\infty[$, les autres cas s'en déduisant aisément. C'est ici avant tout la pratique, au travers d'exercices, qui compte.

6.1. Intégrabilité et intégrale sur $[a,+\infty[$

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a,+\infty[$. On aimerait pouvoir étendre la définition de l'intégrabilité de f (et de son intégrale, si elle est intégrable) en utilisant des sommes de Riemann et des subdivisions pointées. L'idée la plus simple consiste à *tronquer* l'intervalle $[a,+\infty[$ à droite, de manière à se ramener à des sous-intervalles compacts. Pour cela, nous allons procéder par étapes.

- Commençons par *compactifier* $[a,+\infty[$ en lui rajoutant $+\infty$, c'est-à-dire en prenant son adhérence dans la droite achevée $\overline{\mathbf{R}}$. Ainsi, nous allons travailler sur $\mathrm{I} = [a,+\infty]$.

A parte historique

Il est bien beau ce théorème, mais ce que l'on aimerait vraiment savoir maintenant, c'est si ψ_f est dérivable, de dérivée f. En d'autres termes, toute fonction intégrable admet-elle une primitive ? La réponse est donnée par le théorème suivant dû à Henri Lebesgue dans le cadre de l'intégrale qui porte son nom et à Arnaud Denjoy et Oskar Perron pour l'énoncé ci-dessous.

Théorème 8.4 — *Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors son intégrale indéfinie est continue et admet presque partout une dérivée égale à f.*

Nous démontrerons ce théorème dans l'appendice à ce chapitre comme application du lemme de recouvrement de Vitali. On peut cependant ici résumer les liens entre intégration et dérivation de la manière suivante :

– si l'on dérive une intégrale indéfinie, alors on retrouve, presque partout, la fonction dont on est parti ;
– si l'on intègre une vraie dérivée, alors on retrouve la fonction qu'on a dérivée ;
– si l'on intègre une dérivée définie seulement presque partout, alors on peut très bien ne pas pouvoir retrouver la fonction de départ. L'exemple de l'escalier du diable est à ce titre éclairant (dérivée nulle presque partout, mais fonction continue surjective de $[0, 1]$ sur lui-même).

Pour avoir un théorème complet de commutation entre dérivation et intégration, il faut se restreindre à une classe de fonctions présentant des variations locales contrôlées.

8.2. Fonctions Lebesgue-intégrables

Comme nous l'avons vu, il existe des fonctions intégrables dont la valeur absolue n'est pas intégrable. En d'autres termes, comme il existe des séries semi-convergentes, il existe des intégrales semi-convergentes (qui n'existent par dans les théories de Riemann et Lebesgue). Cependant, comme dans la théorie des séries avec les séries absolument convergentes, les fonctions à valeur absolue intégrable jouent un rôle particulier de par leur stabilité dans une large classe de processus de passage à la limite. Nous rappelons donc la définition suivante :

Définition 8.1 — *Une fonction f définie sur un intervalle quelconque* I *est dite* Lebesgue-intégrable*, ou* intégrable au sens de Lebesgue *si f* et *$|f|$ sont intégrables. On dit aussi que f est absolument intégrable.*

Si f est Lebesgue-intégrable sur I alors $f^+ = \max\{f, 0\} = (f + |f|)/2$ et $f^- = \min\{f, 0\}$ sont Lebesgue-intégrables.

Cependant l'inconvénient majeur de la définition ci-dessus est qu'elle est difficilement exploitable directement lorsqu'il s'agit de faire des manipulations algébriques

Pour les mêmes raisons que pour l'équation de Laplace, l'on recherche souvent les solutions de cette équation dans un domaine de la forme $\Omega \times \mathrm{I}$ où Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et I un intervalle de $\mathbf{R}$, en imposant des conditions aux limites.

L'équation des ondes enfin, comme son nom l'indique, est censée déterminer la propagation des ondes dans un milieu idéalisé, et elle s'écrit, de manière assez générale, sous la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \Delta u.$$

Nous allons étudier un peu plus précisément cette dernière équation dans le cas particulier d'une *corde vibrante.* Mais avant de nous lancer, notons un caractère commun à toutes ces équations : elles sont *linéaires.* Ce que l'on entend par là c'est que si u_1 et u_2 sont deux solutions d'une de ces équations, l'équation des ondes par exemple et si μ_1, μ_2 sont deux nombres réels, alors $\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2$ est aussi solution de la même équation. On dit aussi que ces équations satisfont au *principe de superposition.* Il vient alors une idée simple : peut-on trouver ce qui pourrait être une *base* de l'ensemble des solutions, base si possible constituée de solutions simples de ces équations ? C'est tout l'objet de la théorie des séries et de la transformée de Fourier. Le problème est qu'il faudra donner au mot « base » un sens quelque peu différent de celui couramment admis en algèbre linéaire, en admettant des sommes infinies, c'est-à-dire des sommes de *séries de fonctions.*

9.1. L'équation des cordes vibrantes

On considère une corde élastique dont les deux extrémités sont fixées et que l'on excite à un moment donné en la pinçant par exemple, et qu'on laisse ensuite évoluer librement. On suppose de plus, pour simplifier, que la corde se meut dans un plan. Rapportons ce plan à un repère et identifions-le à $\mathbf{R}^2$. La corde est alors attachée aux points $(0,0)$ et $(\ell, 0)$, où ℓ est la longueur de la corde au repos. Le déplacement de la corde est alors modélisé par une fonction de deux variables $u(x,t)$, où $x \in [0,\ell]$ et $t \in \mathbf{R}$, de sorte qu'au temps t le point de la corde d'abscisse x est situé en $(x, u(x,t))$: $u(x,t)$ représente le *déplacement transverse* de la corde par rapport à sa position de repos.

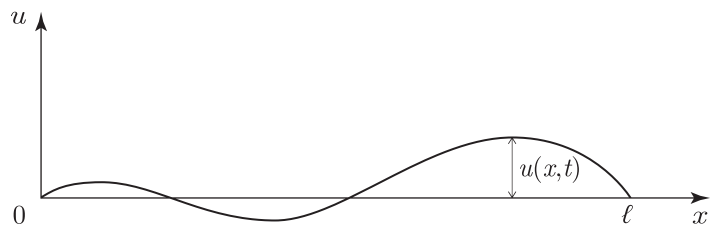

Figure 9.1 – Une corde vibrante

Si f est Lebesgue-intégrable sur Ω_{r_1,r_2}, alors la formule de passage aux coordonnées sphériques pour les intégrales triples s'écrit :

$$\int_{\Omega_{r_1,r_2}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f_s(r,\theta,\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

On peut bien sûr étendre toutes ces formules à des domaines définis dans divers secteurs angulaires et nous renvoyons aux exercices pour quelques applications pratiques.

10.6. La formule de Green-Riemann

La formule fondamentale du calcul différentiel et intégral offre à l'analyste un outil formidable qui fait le pont entre l'intégration et la dérivation. Il fournit ainsi à l'étude de sujets comme les équations différentielles tout l'arsenal puissant de la théorie de l'intégration. Il existe un analogue de cette formule en plusieurs variables, c'est la *formule de Stokes.* Ne serait-ce qu'énoncer celle-ci dans le cas général nous mènerait trop loin, dans le territoire des variétés et des formes différentielles. Nous allons cependant ici donner un avatar de cette formule valable pour certains domaines simples du plan $\mathbf{R}^2$.

Dans la suite, nous identifierons $\mathbf{R}^2$ à la droite complexe $\mathbf{C}$, et utiliserons de manière tacite cette identification. Ainsi, si (x_0, y_0) est un point de $\mathbf{R}^2$, nous le noterons $z_0 = x_0 + iy_0$ comme nombre complexe, et utiliserons librement les notions de module et d'argument.

Avant même d'énoncer la formule de Green-Riemann, il nous faut passer par quelques préliminaires de géométrie des arcs dans le plan, afin de pouvoir définir l'intégration sur iceux.

10.6.1. Chemins

Définition 10.10 — *Un chemin (ou arc) de classe $\mathcal{C}^1$ du plan $\mathbf{R}^2$ est une application γ, de classe $\mathcal{C}^1$, définie sur un intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, et* de dérivée partout non nulle. *Le chemin γ est dit continu $\mathcal{C}^1$ par morceaux si γ est continue, et est $\mathcal{C}^1$ par morceaux au sens qui précède : c'est un recollement bout à bout d'un nombre fini de chemins de classe $\mathcal{C}^1$.*

Exemples :

– Soient (x_0, y_0) et (x_1, y_1) deux points du plan. Le segment les reliant est un chemin $\mathcal{C}^1$, qu'on peut paramétrer par une combinaison barycentrique :

$$\gamma(t) = ((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1), \ \ t \in [0,1].$$

Chapitre 11

Mesure de Lebesgue, espaces L^p, applications

L'une des idées les plus fécondes de l'analyse moderne a été de considérer les fonctions comme des points dans certains espaces sur lesquels utiliser l'intuition géométrique. Ainsi, si $\mathrm{K} \subset \mathbf{R}^d$ est un compact, l'espace $\mathcal{C}^0(\mathrm{K}, \mathbf{R})$ des fonctions numériques continues sur K est naturellement muni d'une structure de $\mathbf{R}$-espace vectoriel (et même de $\mathbf{R}$-algèbre). Cet espace n'est de dimension finie que si K est un ensemble fini. Dans tous les cas on peut munir $\mathcal{C}^0(\mathrm{K}, \mathbf{R})$ de la norme uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup \left\{ |f(\mathbf{x})|,\ \mathbf{x} \in \mathrm{K} \right\}$$

et cela fait de $\mathcal{C}^0(\mathrm{K}, \mathbf{R})$ un espace vectoriel normé et complet : on dit que c'est un espace de Banach. On peut en étudier les propriétés algébriques et géométriques comme pour n'importe quel espace vectoriel normé, et il se trouve qu'il existe un dictionnaire entre les propriétés de cet espace et les propriétés topologiques de K. Le théorème de Gelfand, donné en exercice et décrivant les idéaux de $\mathcal{C}^0(\mathrm{K}, \mathbf{R})$ en est un exemple fondamental, qui illustre l'intérêt d'avoir de jolis espaces fonctionnels sur lesquels travailler.

Dans le cadre de la théorie de l'intégration il ressort une famille d'espaces très importants, les espaces de Lebesgue dits « espaces L^p » ; il y en a un pour chaque réel $p \geqslant 1$, et l'espace L^1 correspond aux fonctions Lebesgue-intégrables. Le but de ce chapitre est de donner une définition propre de ces espaces et de démontrer leur caractère complet pour la norme qui leur est naturellement associée. C'est, après le théorème de convergence dominée, un des résultats fondamentaux de l'analyse moderne.

11.1. Fonctions mesurables

Nous présentons dans ce livre la théorie de l'intégrale de Lebesgue qui est une théorie de l'intégration sur $\mathbf{R}^d$ qui possède la propriété d'être invariante par translation et