

**PROBLÈMES CORRIGÉS
DE MÉCANIQUE
ET RÉSUMÉS DE COURS
DE LAGRANGE À HAMILTON**

Claude GIGNOUX et Bernard SILVESTRE-BRAC



17, avenue du Hoggar
Parc d'Activité de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Grenoble Sciences

Grenoble Sciences poursuit un triple objectif :

- réaliser des ouvrages correspondant à un projet clairement défini, sans contrainte de mode ou de programme,
- garantir les qualités scientifique et pédagogique des ouvrages retenus,
- proposer des ouvrages à un prix accessible au public le plus large possible.

Chaque projet est sélectionné au niveau de Grenoble Sciences avec le concours de referees anonymes. Puis les auteurs travaillent pendant une année (en moyenne) avec les membres d'un comité de lecture interactif, dont les noms apparaissent au début de l'ouvrage. Celui-ci est ensuite publié chez l'éditeur le plus adapté.

(Contact : Tél. : (33)4 76 51 46 95, e-mail : Grenoble.Sciences@ujf-grenoble.fr)

Deux collections existent chez EDP Sciences :

- la *Collection Grenoble Sciences*, connue pour son originalité de projets et sa qualité
- *Grenoble Sciences - Rencontres Scientifiques*, collection présentant des thèmes de recherche d'actualité, traités par des scientifiques de premier plan issus de disciplines différentes.

Directeur scientifique de Grenoble Sciences

Jean BORNAREL, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1

Comité de lecture pour

“Problèmes corrigés de mécanique et résumés de cours”

- **Robert ARVIEU**, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1
 - **Jacques MEYER**, Professeur à l'Institut de Physique Nucléaire, Université Claude Bernard, Lyon 1
- et
- **Myriam REFFAY – Bertrand RUPH**

Grenoble Sciences reçoit le soutien
du **Ministère de l'Éducation nationale**, du **Ministère de la Recherche**,
de la **Région Rhône-Alpes**, du **Conseil général de l'Isère**
et de la **Ville de Grenoble**.

Réalisation et mise en pages : **Centre technique Grenoble Sciences**
Illustration de couverture : **Alice Giraud**

ISBN 2-86883-720-4

© EDP Sciences, 2004

EXTRAITS

TABLEAUX SYNOPTIQUES DES PROBLÈMES

Chapitre 1 – FORMULATION LAGRANGIENNE

N°	TITRE	NIVEAU	PAGE	ASPECTS ABORDÉS
1.1	Le cric	1	22	Mécanique lagrangienne • principe de d'Alembert
1.2	La fronde	1	23	Equations de Lagrange pour un système très simple
1.3	La corde glissant sur la table	1	23	Equations de Lagrange en présence de frottement
1.4	Force de réaction d'une perle sur un cerceau	2	24	Force de réaction calculée par ajout d'une coordonnée généralisée
1.5	Le pendule de Huygens	3	24	Travail des forces de contact
1.6	Cylindre roulant sur un plateau mobile	2	25	Equations de Lagrange avec deux coordonnées différentes
1.7	Mouvement d'un cylindre mal équilibré	3	25	Théorème de Koenig • liaison holonôme
1.8	Essieu libre sur un plan incliné	3	26	Equations de Lagrange contraintes • multiplicateurs de Lagrange
1.9	L'indicateur de virage	3	27	Le gyroscope en formalisme lagrangien
1.10	Une expérience pour mesurer la vitesse de rotation de la Terre	3	29	Un gyroscope habilement exploité pour une expérience alternative au pendule de Foucault
1.11	Forces d'inertie généralisées	3	30	Equations de Lagrange dans un référentiel non galiléen

Chapitre 2 – SYSTÈMES LAGRANGIENS

N°	TITRE	NIVEAU	PAGE	ASPECTS ABORDÉS
2.1	Disque sur un coin en mouvement	1	59	Exemple de lagrangien dépendant du temps
2.2	Intégrale de Painlevé	2	60	Recherche d'une intégrale première pour un lagrangien dépendant du temps
2.3	Application du théorème de Noether	1	60	Application très simple du théorème de Noether

N°	TITRE	NIVEAU	PAGE	ASPECTS ABORDÉS
3.6	Principe de Maupertuis	2	113	Alternative au principe de Hamilton pour la détermination des trajectoires
3.7	Principe de Fermat	2	114	Le principe de Hamilton dans le domaine de l'optique
3.8	La stratégie du skieur	3	115	Calcul des variations pour la brachistochrone
3.9	Mouvement libre sur un ellipsoïde	2	115	Calcul des variations avec contrainte holonôme • multiplicateur de Lagrange
3.10	Aire minimum à volume fixé	2	116	Calcul des variations avec contrainte intégrale • multiplicateurs de Lagrange
3.11	Forme des films de savon	3	117	Application amusante du principe de Hamilton • calcul des variations
3.12	Loi de Laplace sur la tension superficielle	3	118	Principe de Hamilton appliqué à l'hydrostatique
3.13	Chaîne de pendules	2	119	Principe de Hamilton pour un système continu
3.14	Equation d'onde pour la lame flexible	2	119	Construction d'une densité lagrangienne
3.15	Précession de l'orbite de Mercure	3	120	Principe de Hamilton dans le cadre de la relativité générale

Chapitre 4 – LE FORMALISME HAMILTONIEN

N°	TITRE	NIVEAU	PAGE	ASPECTS ABORDÉS
4.1	Charges électriques piégées par des conducteurs	2	157	Image électrostatique • équations de Hamilton • intégrale première
4.2	Symétrie de la trajectoire	1	157	Equation de Binet • son utilisation pour traiter les symétries
4.3	Hamiltonien dans un référentiel tournant	2	158	Changement de référentiel • transformation de Legendre
4.4	Flots hamiltoniens identiques	1	158	Equations de Hamilton et leur flot
4.5	Le vecteur de Runge-Lenz	2	158	Construction d'un vecteur constant • lien avec d'autres constantes du mouvement
4.6	Plus rapide et plus écologique que le Concorde	2	159	Equations de Hamilton dans un champ de gravité

N°	TITRE	NIVEAU	PAGE	ASPECTS ABORDÉS
5.6	Lentille électrostatique	3	218	Electromagnétisme et principe de Maupertuis pour un système de révolution
5.7	Principe de Maupertuis avec champ électromagnétique	3	220	Champ électromagnétique et principe de Maupertuis • mouvement cyclotron
5.8	Hamiltonien séparable, action séparable	1	221	Séparation des variables dans l'équation de Hamilton-Jacobi
5.9	Effet Stark	3	221	Coordonnées paraboliques pour séparer les variables
5.10	Orbites des satellites de la Terre	3	222	Coordonnées elliptiques pour séparer les variables
5.11	Vitesse de phase et vitesse de groupe	1	225	Une notion d'optique valable en mécanique

Chapitre 6 – SYSTÈMES INTÉGRABLES

N°	TITRE	NIVEAU	PAGE	ASPECTS ABORDÉS
6.1	Expression de la période pour un mouvement à une dimension	1	261	Action réduite et pulsation
6.2	Particule à une dimension dans une boîte	2	261	Variables angles-actions • quantification
6.3	Balle rebondissant sur le sol	2	261	Variables angles-actions • quantification
6.4	La particule dans un champ magnétique constant	3	262	Variable action • portrait de phase • niveaux de Landau
6.5	Actions pour le problème de Kepler	3	263	Energie en fonction des actions • quantification
6.6	L'atome de Sommerfeld	3	263	Energie en fonction des actions • système relativiste • quantification
6.7	Energie en fonction des actions	3	265	Forme du hamiltonien en fonction des actions
6.8	Invariance de la circulation par déformation continue	3	266	Fonctions en involution • circulation sur un tore
6.9	Balle rebondissant sur un plateau en mouvement	1	267	Transformation canonique dépendant du temps pour la chute libre
6.10	Oscillateur harmonique à fréquence variable	2	267	Transformation canonique dépendant du temps pour l'oscillateur harmonique

Chapitre 3

LE PRINCIPE DE HAMILTON

Résumés de cours

3.1. ÉNONCÉ DU PRINCIPE

On peut énoncer les lois de la mécanique (lois de Newton ou équations de Lagrange) sous une forme équivalente plus concise, mais surtout de portée beaucoup plus générale, applicable à tous les domaines de la physique. Cette formulation a pour nom "principe de Hamilton" ou "principe de moindre action". Son contenu est le suivant :

*Pour un système lagrangien, parmi toutes les évolutions temporelles imaginables de la configuration $q(t)$ (rappelons que $q(t)$ est une notation simplifiée pour l'ensemble des degrés de liberté $q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$) qui commencent et finissent de façon déterminée (on parle alors de chemins), l'évolution réelle (on parle alors de trajectoire) rend stationnaire¹ la quantité dite **action**².*

Tout l'art du physicien consiste alors à proposer une forme pour l'action, qui rende compte des phénomènes physiques observés.

3.2. LA FONCTIONNELLE ACTION

Etant donné un chemin $q(t)$, l'action S se calcule en intégrant par rapport au temps la fonction de Lagrange L . Elle est fonction d'une fonction $q(t)$ et on dit que c'est une fonctionnelle. Précisément, on pose :

-
- 1 Stationnaire veut dire qu'une variation infiniment petite du chemin, comme $q(t) + \varepsilon(t)$, n'entraîne pas de changement de la quantité action au premier ordre en ε .
 - 2 On notera l'analogie avec le principe de Fermat ou principe du moindre chemin optique. Le rôle du temps est joué par l'abscisse curviligne, et le lagrangien par l'indice optique. De même qu'il peut exister plusieurs rayons qui joignent l'objet à son image, il peut exister plusieurs trajectoires à bornes fixées, comme vous pourrez le voir dans les problèmes 3.4 et 3.5.

étant fonction des conditions initiales. Un mode propre est une solution pour laquelle toutes les coordonnées généralisées ont une dépendance harmonique dans le temps (même pulsation) mais avec des phases et des amplitudes distinctes.

En pratique pour trouver un mode propre, on commence par écrire le lagrangien en fonction des nouvelles coordonnées $Q = q - q^{(\text{équil})}$, qui mesurent l'écart à la position d'équilibre, et de leur vitesses \dot{Q} . Les termes linéaires étant absents à cause de la condition d'équilibre, on ne garde que les termes quadratiques en Q . On cherche alors les modes propres (k), c'est-à-dire les nombres complexes Q_i^{max} et la pulsation $\omega^{(k)}$ (pulsation propre) tels que $Q_i^{(k)}(t) = \text{Réal}\left(Q_i^{\text{max}} e^{i\omega^{(k)}t}\right)$ soient solutions des équations de Lagrange. On tombe en général sur un système linéaire sans second membre dont les n valeurs propres sont les n pulsations $\omega^{(k)}$ des modes propres (en général la pulsation apparaît au carré dans ce système). La solution au problème est une superposition des modes propres $Q_i(t) = \sum_{k=1}^n Q_i^{(k)}(t)$, dont les amplitudes sont déterminées par les conditions initiales.

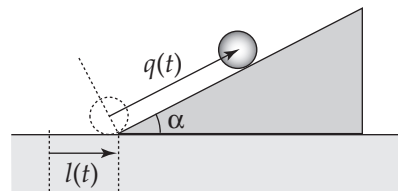
Problèmes · énoncés

2.1. DISQUE SUR UN COIN EN MOUVEMENT [SOLUTION P. 74] ■

Etude d'un système lagrangien très simple.

Figure 2.1

Disque roulant sans glisser sur un coin que l'on déplace.



Dans un espace à deux dimensions, un disque peut rouler sans glisser sur un plan incliné (un coin) sous l'influence d'un champ de pesanteur constant g vertical. On posera R, I, m , le rayon, le moment d'inertie par rapport à l'axe et la masse du disque, α , l'inclinaison du plan incliné et $l(t)$ l'équation horaire du coin imposée par un opérateur.

- 1 Quel est le mouvement de ce disque sur le coin pour un déplacement horizontal donné du coin ? Le disque peut-il remonter le plan ?
- 2 Retrouver ce résultat, de façon plus élégante, en travaillant dans le référentiel non galiléen du coin. On vérifiera d'abord que la force d'inertie de translation, examinée dans le problème 1.11 (p. 30), dérive du potentiel $V_{\text{trans}} = m\vec{a}^{(e)} \cdot \vec{R}_{cm}$.

- 1 Ecrire les équations d'Euler-Lagrange.
- 2 Ecrire les équations donnant les pulsations propres.
- 3 L'invariance par translation de deux atomes nous suggère de chercher une solution de la forme $u_n(t) = U \exp(in\phi + i\omega t)$ pour chaque type d'atomes.
 $v_n(t) = V \exp(in\phi + i\omega t)$
 Donner les deux solutions $\omega(\phi)$. La plus grande $\omega_{\text{opt}}(\phi)$ est appelée pulsation optique, l'autre pulsation $\omega_{\text{acou}}(\phi)$ est appelée acoustique.
- 4 Etudier le comportement de $\omega(\phi)$ au voisinage de $\phi = 0$. Pour chacun de ces cas, étudier le signe de U/V . Un signe positif correspond à un mouvement en phase à basse fréquence de tous les atomes, un signe négatif correspond à un mouvement en opposition de phase pour deux atomes voisins à haute fréquence. Donner $\omega(\phi = \pi)$. Tracer schématiquement $\omega_{\text{opt}}(\phi)$ et $\omega_{\text{acou}}(\phi)$.
- 5 Excitons un atome avec une onde de pulsation ω . A quelle condition sur ω la perturbation se propage-t-elle ? Remarquer que cette chaîne d'atomes est un filtre passe-bas avec une bande d'arrêt ou "gap".
- 6 On impose des conditions de périodicité au mouvement des atomes. Le mouvement du groupe d'atomes d'ordre $N + 1$ est celui du groupe 1. En déduire les valeurs possibles de ϕ .

Problèmes · solutions

2.1. DISQUE SUR UN COIN EN MOUVEMENT [ÉNONCÉ P. 59]

- 1 Soit H le point de contact du disque de centre C et du coin ; on appelle $q = OH$ la coordonnée généralisée choisie, O étant une origine quelconque choisie sur le coin. La condition de roulement sans glissement impose $\dot{q} = -R\dot{\theta}$, où θ est l'angle de repérage d'un point quelconque B du disque.

La vitesse du centre du disque s'obtient aisément en additionnant la vitesse d'entraînement de l'origine, qui vaut $\dot{l}(t)$ le long de l'horizontale et la vitesse relative au coin qui est \dot{q} le long de la pente. En choisissant pour axes le sens de la pente et le sens de la normale au coin, la vitesse du centre a pour composante $\vec{v}_C = (\dot{q} + \dot{l} \cos \alpha, \dot{l} \sin \alpha)$. L'énergie cinétique du disque est obtenue par application du théorème de Koenig comme la somme de l'énergie du centre de masse $\frac{1}{2} m \vec{v}_C^2$ et de l'énergie de rotation autour du centre $\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{I}{2R^2} \dot{q}^2$.

La seule force qui travaille est le poids qui dérive du potentiel $V = mgq \sin \alpha$ (à une constante près sans importance). Tout calcul fait, nous obtenons l'expression du lagrangien :

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m \left[\left(1 + \frac{I}{mR^2} \right) \dot{q}^2 + 2\dot{l}(t)\dot{q} \cos \alpha + \dot{l}(t)^2 \right] - mgq \sin \alpha$$

L'équation de Lagrange (2.4) fournit la loi donnant l'accélération du mouvement :

$$\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)\ddot{q} = -g \sin \alpha - \ddot{l}(t) \cos \alpha$$

C'est l'équation d'un mobile dans un champ de pesanteur variable. Intégrons une fois par rapport au temps pour obtenir la vitesse :

$$\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)\dot{q} = -gt \sin \alpha - \dot{l}(t) \cos \alpha$$

On peut très bien avoir $\dot{q} > 0$ – le disque remonte le coin – si la condition $\dot{l}(t) < -gt \tan \alpha$ est satisfaite.

La loi horaire du mouvement s'obtient par une intégration supplémentaire (à une constante près) :

$$q(t) = -\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)^{-1} \left[\frac{g \sin \alpha}{2} t^2 + l(t) \cos \alpha \right]$$

- 2 L'accélération d'entraînement est horizontale : c'est celle du coin $a^{(e)} = \ddot{l}$. La composante horizontale du centre de masse C dans ce référentiel vaut $q \cos \alpha$ et le potentiel d'inertie indiqué dans l'énoncé s'écrit dans ce cas $V_{trans} = mql \ddot{l} \cos \alpha$, et le lagrangien :

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{I}{mR^2}\right) \dot{q}^2 - mgq \sin \alpha - mql \ddot{l} \cos \alpha$$

Il s'identifie à l'expression de la question précédente si on ajoute une dérivée totale d'une fonction par rapport au temps. Le dernier terme du deuxième membre peut s'interpréter comme un poids apparent (principe d'équivalence champ de gravitation – référentiel accéléré).

2.2. INTÉGRALE DE PAINLEVÉ [ÉNONCÉ P. 60]

- 1 Soient O une origine fixe, Ox un axe horizontal, Oz un axe vertical dirigé vers le bas et A le point d'application du pendule, qui se déplace le long de Ox avec la loi horaire $\overline{OA} = a(t)$. La seule force qui travaille est la gravité qui dérive, avec nos conventions, d'un potentiel $V = -mgz$. Par conséquent le système est lagrangien.
- 2 Appelons q l'angle entre l'axe Oz et la direction du pendule ; c'est notre coordonnée généralisée. Les composantes du pendule de masse m sont $x = a + l \sin q$ et $z = l \cos q$. L'énergie cinétique est simplement $T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ et l'énergie potentielle

7.8. UN PEU DE LUMIÈRE SUR LES AURORES BORÉALES

[SOLUTION ET FIGURE P. 338] ■ ■

Un phénomène naturel fascinant passé à la loupe. Il est vivement conseillé de résoudre auparavant les problèmes 2.9 et 7.7.

A une bonne approximation, le magnétisme de la Terre est celui d'un dipôle magnétique. Dans le plan équatorial magnétique, le champ magnétique, qui lui est perpendiculaire, a pour intensité $B_e = 0,31 \cdot 10^{-4} (R_T / R)^3$ Tesla (B_e pour valeur de B à l'équateur) ; dans cette formule R_T désigne le rayon terrestre et R la distance au centre de la Terre, pour laquelle ce champ est mesuré.

Un électron, de masse m , de charge q_e et d'énergie E , traverse ce plan équatorial, à la distance R du centre de la Terre, sa vitesse formant un angle α avec la direction du champ magnétique.

- 1 Rappeler l'expression de la pulsation cyclotron et montrer que le rayon cyclotron (projection de la trajectoire sur le plan équatorial) est à la limite non relativiste :

$R_c = \sqrt{2mE \sin^2 \alpha} / (q_e B_e)$. En unité de rayon terrestre, combien vaut ce rayon pour $\alpha = \pi / 4$, pour une énergie $E = 60$ keV, à une distance $1,5 R_T$ du centre de la Terre. Donner aussi la période de cette rotation cyclotron.

On donne $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, $R_T = 6367$ km.

- 2 Montrer que la variable action (se reporter au problème 7.7) vaut :

$$p_\phi = -mE \sin^2 \alpha / (q_e B_e).$$

L'électron s'enroule en hélice autour des lignes de champ et voit donc un champ magnétique qui croît lorsqu'il se rapproche d'un pôle. La variable action est un invariant adiabatique.

- 3 En notant par s la distance parcourue le long de la ligne de champ, par $B(s)$ l'intensité de celui-ci ($B_e = B(s=0)$), montrer que l'énergie associée au mouvement de rotation est $E \sin^2 \alpha B(s) / B_e$. L'énergie totale de la particule est une constante. Pourquoi ? En déduire que l'électron, quelle que soit son énergie, ne peut pas explorer une région proche du pôle pour laquelle le champ magnétique dépasse la valeur $B(s_m) = B_e / \sin^2 \alpha$.

La particule rebondit dans les régions de champ fort près des pôles et effectue des rebondissements successifs d'un hémisphère à l'autre.

- 4 Montrer que la période des ces allers-retours est donnée par l'intégrale : $T =$

$$2\sqrt{m/(2E)} \int_{-s_m}^{s_m} ds / \sqrt{1 - B(s)/B(s_m)} \quad (\text{elle vaut environ } 2 \text{ s pour des électrons de } 30 \text{ keV}).$$

En se rapprochant des pôles, donc de l'atmosphère, les charges électriques piégées par ce mécanisme (essentiellement des protons et des électrons) heurtent finalement les atomes de la haute atmosphère qui passent alors dans un état excité. La désexcitation de ceux-ci s'accompagne alors d'une lumière qui est à la naissance des aurores boréales.

7.8. UN PEU DE LUMIÈRE SUR LES AURORES BORÉALES [ÉNONCÉ P. 317]

- 1 Nous sommes en régime non relativiste, la vitesse de l'électron en fonction de l'énergie est donc donnée par $v = \sqrt{2E/m}$. C'est sa composante dans le plan équatorial $v_e = v \sin \alpha = \sqrt{2E \sin^2 \alpha / m}$ qui est responsable du mouvement cyclotron. La pulsation cyclotron à l'équation est fournie par la relation traditionnelle $\omega = q_e B_e / m$; elle est indépendante de la vitesse. Le rayon cyclotron R_c , par contre, en dépend puisqu'on a le lien $R_c = v_e / \omega$, qui, tous calculs faits, vaut :

$$R_c = \frac{\sqrt{2mE \sin^2 \alpha}}{q_e B_e}$$

Application numérique – $B_e = 9,18510^{-6}$ T, $1/\omega = 6,19910^{-7}$ s, $v_e = 1,02710^8$ m/s, puis $R_c = 63,63$ m, soit $R_c/R_T = 10^{-5}$. La période cyclotron vaut $\tau = 2\pi / \omega = 3,89$ μ s.

- 2 L'énergie cinétique de rotation $E_c = \frac{1}{2} m v_e^2 = E \sin^2 \alpha$. Cette énergie est liée à l'action p_ϕ par le lien (voir problème 7.7) : $E_c = -\omega p_\phi$. Nous en déduisons la valeur de l'action :

$$p_\phi = -\frac{mE \sin^2 \alpha}{q_e B_e}$$

- 3 La variation du champ magnétique le long des lignes de champ est très lente par rapport au rayon cyclotron. L'action est un invariant adiabatique, qui reste constante tout au long du parcours de l'électron. A l'abscisse s , l'énergie de rotation est $E_c(s) = -\omega(s)p_\phi = -p_\phi q_e B(s) / m$, soit avec la valeur de p_ϕ obtenue à la question précédente :

$$E_c(s) = E \sin^2 \alpha \frac{B(s)}{B_e}$$

La charge n'est soumise qu'à la force de Lorentz qui est toujours perpendiculaire à la vitesse ; par conséquent il n'y a aucun travail effectué et il y a conservation de l'énergie totale E . La particule se dirigeant vers le pôle, le champ magnétique augmente et donc son énergie de rotation augmente, au détriment bien sûr de la vitesse de translation le long des lignes de champ. Il existe une abscisse s_m pour laquelle l'énergie de rotation est égale à l'énergie totale : $E_c(s_m) = E$. A cet endroit la vitesse de translation s'annule et l'électron rebrousse chemin. La condition précédente est équivalente à la condition sur le champ :

$$B(s_m) = \frac{B_e}{\sin^2 \alpha}$$

- 4 L'énergie de translation, ou longitudinale, est la différence entre l'énergie totale et l'énergie de rotation $E_l(s) = E - E_c(s) = E - E \sin^2 \alpha B(s) / B_e = E(1 - B(s) / B(s_m))$. La vitesse de translation vaut donc $v_l(s) = \sqrt{2E_l(s) / m} = \sqrt{2E / m} \sqrt{1 - B(s) / B(s_m)}$. Par définition, on a aussi $v_l(s) = ds / dt$. On en déduit le temps entre deux annulations de la vitesse longitudinale, entre $s = -s_m$ et $s = s_m$, $\int dt = \int_{-s_m}^{s_m} ds / v_l(s)$. La période d'un aller-retour est évidemment deux fois ce temps, ce qui conduit à la valeur :

$$T = \sqrt{\frac{2m}{E}} \int_{-s_m}^{s_m} \frac{ds}{\sqrt{1 - B(s) / B(s_m)}}$$

- 5 La force (normale à la Terre) est donnée par le gradient de l'énergie $F = |\partial_R(\mu B(R))| = 0,31 \cdot 10^{-4} \mu R_T^3 \times 3 / R^4 = 3\mu B(R) / R$. D'autre part, à l'équateur $\mu B(R) = E_c = E \sin^2 \alpha$. Ainsi la valeur absolue de la force est :

$$F(R) = \frac{3E \sin^2 \alpha}{R}$$

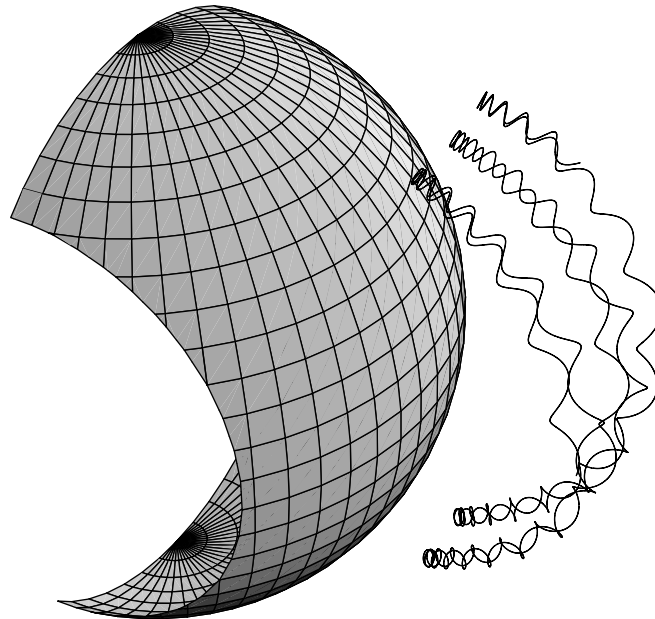


Figure 7.7 - Trajectoires, dans le champ magnétique terrestre, calculées numériquement grâce aux équations de Hamilton, pour un électron de 100 keV, passant à $1,6R_T$ à l'équateur magnétique, et faisant un angle de 45° avec le champ magnétique. Pour rendre plus visibles les différents mouvements, nous avons pris un magnétisme beaucoup plus faible qu'en réalité.