Relativité générale et astrophysique

Problèmes et exercices corrigés

Denis Gialis et François-Xavier Désert

EDP Sciences

17, avenue du Hoggar
Parc d'Activité de Courtabœuf - BP 112
91944 Les Ulis Cedex A - France

Avant-propos

La théorie de la relativité générale constitue, avec la théorie quantique, l'une des plus grandes avancées scientifiques du XX^{e} siècle. Le cadre mathématique sur lequel elle s'appuie est celui des variétés pseudo-riemanniennes, et l'une des découvertes majeures d'Albert Einstein est d'avoir compris le lien entre la gravitation, la matière et la géométrie de notre espace physique rebaptisé *espace-temps*.

Tout étudiant en physique connaît les efforts et la persévérance dont il faut faire preuve pour comprendre les bases de la relativité générale. Les enseignants en Master, dans les écoles doctorales ou dans les Grandes Ecoles, savent également les difficultés que l'on rencontre lorsqu'il s'agit d'exposer une théorie si fondamentale. Pourtant, les applications pratiques et les conséquences théoriques dans l'astrophysique moderne sont innombrables et incontournables.

Cet ouvrage de problèmes et d'exercices, de difficulté variable, a été construit dans l'unique but d'aider tout étudiant, chercheur ou curieux souhaitant assimiler les bases de la relativité générale via la pratique du calcul, tensoriel notamment, et du raisonnement mathématique et physique. De nombreuses démonstrations de cours, premiers tremplins vers des calculs plus complexes, sont ainsi intégrées dans des problèmes plus généraux et souvent très classiques. Chaque problème ou exercice fait l'objet d'une correction suffisamment détaillée pour permettre un travail parfaitement autonome de l'étudiant du Master au Doctorat.

Les deux premiers chapitres sont conçus pour amener le lecteur à se familiariser avec les notions mathématiques essentielles de géométrie différentielle et de calcul tensoriel. De nombreux points de vocabulaire sont introduits, et l'espace-temps est présenté et étudié dans le cadre plus général des variétés pseudo-riemanniennes.

Le troisième chapitre met l'accent sur le problème récurrent de la mesure du temps, des distances et des énergies par un observateur plongé dans un espace-temps courbé par un objet massif, ou bien artificiellement accéléré au cours d'un voyage spatial. Le problème pratique des systèmes de géolocalisation est abordé, tout comme celui de la gravitation en champ faible faisant le lien avec la gravitation de Newton.

Les chapitres quatre et cinq abordent l'étude de l'espace-temps au voisinage des deux principaux types de trous noirs observés dans l'Univers que sont les trous noirs à symétrie sphérique, sans rotation ni charge électrique, appelés trous noirs de Schwarzschild, et les trous noirs en rotation mais dénués de charge électrique que l'on nomme trous noirs de Kerr. Le formalisme 3+1, utilisé de nos jours dans de nombreuses publications, est présenté au lecteur.

Le chapitre six propose une introduction à l'étude des ondes gravitationnelles, depuis la linéarisation de l'équation d'Einstein jusqu'aux conséquences pour la perte d'énergie d'un système binaire d'objets compacts.

Dans le chapitre sept, on introduit le tenseur énergie-impulsion et le tenseur champ électromagnétique. Divers exemples, comme les célèbres équations de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, permettent de découvrir leur utilisation dans le cadre de l'hydrodynamique et/ou de l'électrodynamique relativiste. Le formalisme 3+1 est de nouveau abordé et nous conduit à la projection des équations d'Einstein et des équations de Maxwell. Enfin, une construction du champ électromagnétique dans la magnétosphère d'un trou noir de Kerr est destinée à préparer le lecteur à l'étude du processus de Blandford-Znajek.

Dans le chapitre huit, c'est une présentation du rôle de la relativité générale dans la cosmologie moderne qui est proposée au travers d'une série d'exercices et de problèmes dont certains sont issus du cours donné par François-Xavier Désert en Master 2, à l'Université Joseph Fourier de Grenoble.

Les notations utilisées, les définitions et les relations fondamentales de la relativité générale sont regroupées dans un formulaire placé en fin d'ouvrage permettant à l'étudiant d'avoir un aperçu synthétique des bases de la théorie.

D. Gialis
14 juin 2013

Avertissement – Au début de chaque problème, des lettres indiquent le niveau de difficulté : [M] signifie accessible dès la première année de Master, [MD] signifie accessible aux étudiants en fin de Master et plus, et enfin, [D] est réservé aux problèmes les plus difficiles de niveau Doctorat.

Notations – La sommation associée aux indices est faite selon la *convention d'Einstein*. En revanche, le type de lettres (latines ou grecques) pour l'écriture des indices et la correspondance au type de coordonnées (spatiales ou temporelles) varient selon les problèmes.

[MD] ## ■ EXERCICE 1.12

Courbes auto-parallèles – Soit une variété pseudo-riemannienne munie d'un système de coordonnées $\{x^\mu\}$ et dont la connexion est sans torsion. On considère une géodésique paramétrée affinement par λ.

1 – Soit λ' un paramètre quelconque tel que $\lambda' = f^{-1}(\lambda)$, avec f un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. A quelle équation obéit $x^\mu(\lambda')$? A quelle condition $x^\mu(\lambda')$ vérifie l'équation des géodésiques ?

2 – Soit une courbe $\mathcal{C}$ de paramétrage quelconque λ' tel que $x^\mu(\lambda')$ vérifie l'équation des courbes auto-parallèles

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda'^2} + \Gamma^\mu_{\ \nu\alpha} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda'} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda'} = f(\lambda') \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda'} ,$$

avec f un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Montrer que $\mathcal{C}$ est une géodésique.

▶ SOLUTION

1 – La géodésique a pour équation

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\ \nu\alpha} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} = 0 .$$

Comme $\lambda' = f^{-1}(\lambda)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda'} &= f'(\lambda') \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} , \\
\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda'^2} &= f''(\lambda') \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} + (f'(\lambda'))^2 \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} \\
&= f''(\lambda') \left[f'(\lambda') \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \right] + (f'(\lambda'))^2 \left[-\Gamma^\mu_{\ \nu\alpha} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} \right] ,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda'^2} + \Gamma^\mu_{\ \nu\alpha} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda'} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda'} = f''(\lambda')\, f'(\lambda') \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda'} .$$

On retrouve donc l'équation des géodésiques si $f''(\lambda')\, f'(\lambda') = 0$, soit $f''(\lambda') = 0$ (puisque $f'(\lambda') \neq 0$). Ainsi, la condition recherchée est que λ' soit aussi un paramètre affine : $\lambda' = a\,\lambda + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$.

2 – Effectuons un changement de paramètre en posant $\sigma = g(\lambda')$, avec g un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. L'équation de la courbe auto-parallèle devient

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\sigma^2} + \Gamma^\mu_{\ \nu\alpha} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} \right] (g'(\lambda'))^2 + \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma} g''(\lambda') = f(\lambda')\, g'(\lambda') \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma} ,$$

et $x^\mu(\sigma)$ vérifie l'équation des géodésiques si

$$g''(\lambda') = f(\lambda')\, g'(\lambda').$$

Cette condition équivaut à

$$\frac{\mathrm{d}(\ln g'(\lambda'))}{\mathrm{d}\lambda'} = f(\lambda')\,,$$

c'est-à-dire

$$g'(\lambda') = A \exp\left[\int_{\lambda_0}^{\lambda'} f(x)\,\mathrm{d}x\right]\,,$$
$$g(\lambda') = \sigma = \int_{\lambda_0}^{\lambda'} g'(x)\,\mathrm{d}x + B\,,$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$. Ce changement de paramètre montre donc que toute courbe auto-parallèle est assimilable à une géodésique. Le paramètre σ ainsi défini est un paramètre affine.

[M] ■ **EXERCICE 1.13**

Géodésiques nulles – On considère une variété pseudo-riemannienne munie d'un système de coordonnées $\{x^\mu\}$ et d'un tenseur métrique de composantes covariantes $g_{\mu\nu}$. Une géodésique est dite *nulle* si, en chacun de ses points, $g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu = 0$. Dans l'espace-temps, les géodésiques nulles représentent les trajectoires spatio-temporelles des particules de masse nulle comme les photons.

1 – Déterminer l'équation des géodésiques nulles lorsque les composantes covariantes du tenseur métrique sont constantes.

2 – En déduire l'équation des géodésiques nulles dans un espace-temps de Minkowski, c'est-à-dire tel que $g_{ij} = -\delta_{ij}$, pour $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$, et $g_{00} = 1$.

▶ **SOLUTION**

1 – Lorsque les composantes du tenseur métrique sont constantes, les symboles de Christoffel sont tous nuls. L'équation des géodésiques est simplement

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}s^2} = 0\,,$$

avec s un paramètre affine. En intégrant, on obtient : $x^\mu = a^\mu\, s + b^\mu$, avec a^μ et b^μ les composantes contravariantes de deux vecteurs constants. Comme $g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu = 0$, on a $g_{\mu\nu}\, a^\mu\, a^\nu = 0$. En remplaçant a^μ par $(1/s)\,(x^\mu - b^\mu)$, l'équation des géodésiques nulles peut s'écrire

$$g_{\mu\nu}\,(x^\mu - b^\mu)\,(x^\nu - b^\nu) = 0\,.$$

2 – Pour un espace-temps de Minkowski, l'équation précédente devient

$$(x^0 - b^0)^2 - (x^1 - b^1)^2 - (x^2 - b^2)^2 - (x^3 - b^3)^2 = 0\,.$$

Cette équation est celle d'un *cône de lumière* en relativité restreinte (figure 1.3).

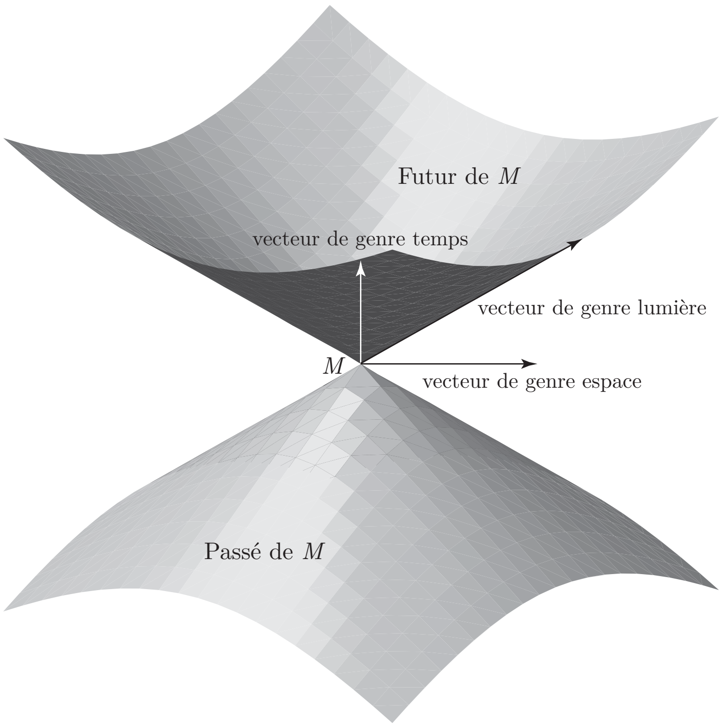

Figure 1.3 – Représentation d'un cône de lumière et des différents genres de vecteurs, dans un espace-temps de Minkowski où l'on a supprimé une des trois dimensions d'espace.

[D] ■ **EXERCICE 2.14**

Tétrades et tenseur de Riemann – Soient $\mathcal{E}$, un espace-temps muni d'une métrique dont la signature est $(+,-,-,-)$, et $T_M(\mathcal{E})$ l'espace tangent à $\mathcal{E}$ en un point M. On appelle *tétrade* ou *champ de bases*, tout ensemble de quatre vecteurs $\{\mathbf{e}_{(\mathbf{a})}\}_{a\in[\![0,3]\!]}$ défini en un point M de $\mathcal{E}$, et formant une base de $T_M(\mathcal{E})$, telle que, pour tout $(a,b)\in[\![0,3]\!]^2$, on a

$$\mathbf{e}_{(\mathbf{a})}\cdot\mathbf{e}_{(\mathbf{b})}=\eta_{ab},$$

avec (η_{ab}) une matrice symétrique constante, dont la matrice inverse sera notée (η^{ab}). Ainsi, une tétrade sera dite *orthonormée* lorsque $\eta_{00}=1$, et $\eta_{ab}=-\delta_{ab}$, pour $a\neq 0$ ou $b\neq 0$.

Remarque : les *étiquettes* ou indices entre parenthèses obéissent à la convention d'Einstein dans les équations.

1 – Que représente le vecteur $\mathbf{e}_{(\mathbf{0})}$ d'une tétrade orthonormée lorsque celui-ci est tangent à la ligne d'univers d'un observateur placé en M ?

2 – A titre d'exemple, former une tétrade orthonormée en utilisant les vecteurs de la base naturelle associée aux coordonnées sphériques dans un espace-temps de Minkowski.

3 – Soit $\{\mathbf{e}^{(\mathbf{a})}\}_{a\in[\![0,3]\!]}$ la base duale associée à une tétrade $\{\mathbf{e}_{(\mathbf{a})}\}_{a\in[\![0,3]\!]}$.

(a) Dans un système de coordonnées $\{x^\mu\}_{\mu\in[\![0,3]\!]}$, montrer les relations suivantes entre les composantes covariantes des vecteurs de la tétrade et de sa base duale :

$$e^{(a)}_\mu=\eta^{ab}\,e_{(b)\mu},$$
$$e_{(a)\mu}=\eta_{ab}\,e^{(b)}_\mu.$$

(b) En déduire que les composantes covariantes du tenseur métrique peuvent s'écrire

$$g_{\mu\nu}=\eta_{ab}\,e^{(a)}_\mu\,e^{(b)}_\nu.$$

4 – Exprimer les composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur $\mathbf{V}$ dans la tétrade en fonction de ses composantes initiales v^μ et v_μ.

5 – On définit les *coefficients de rotation de Ricci*, notés γ_{abc}, par

$$\gamma_{abc}=e_{(a)\mu;\,\nu}\,e^\mu_{(b)}\,e^\nu_{(c)},$$

avec la notation : $e_{(a)\mu;\,\nu}=\nabla_\nu e_{(a)\mu}$.

(a) Montrer que ces coefficients sont antisymétriques par rapport à la première paire d'indices.

(b) On définit la dérivation, suivant la direction a, d'un champ scalaire ϕ par

$$\phi_{,\,(a)} = e^{\mu}_{(a)}\,\partial_\mu \phi.$$

Montrer que les composantes covariantes du tenseur de Riemann dans la tétrade peuvent s'écrire, avec la notation $\gamma^{a}_{\ bc} = \eta^{ad}\,\gamma_{dbc}$,

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = \gamma_{abc,\,(d)} - \gamma_{abd,\,(c)} + \gamma_{abe}\left(\gamma^{e}_{\ cd} - \gamma^{e}_{\ dc}\right) + \gamma_{aec}\,\gamma^{e}_{\ bd} - \gamma_{aed}\,\gamma^{e}_{\ bc}.$$

(c) On définit les quantités λ_{abc} par $\lambda_{abc} = \gamma_{abc} - \gamma_{acb}$. Montrer que les composantes covariantes du tenseur de Ricci dans la tétrade sont

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)} = -\frac{1}{2}\Big(&\lambda_{ab}{}^{c}{}_{,\,(c)} + \lambda_{ba}{}^{c}{}_{,\,(c)} + \lambda^{c}{}_{ca,\,(b)} + \lambda^{c}{}_{cb,\,(a)} + \lambda^{cd}{}_{b}\,\lambda_{cda} \\ &+ \lambda^{cd}{}_{b}\,\lambda_{dca} - \frac{1}{2}\,\lambda_{b}{}^{cd}\,\lambda_{acd} + \lambda^{c}{}_{cd}\,\lambda_{ab}{}^{d} + \lambda^{c}{}_{cd}\,\lambda_{ba}{}^{d}\Big). \end{aligned}$$

▶ SOLUTION

1 – Le vecteur $\mathbf{e}_{(\mathbf{0})}$ est colinéaire au quadri-vecteur vitesse $\mathbf{u}$ de l'observateur. Comme $\mathbf{e}_{(\mathbf{0})} \cdot \mathbf{e}_{(\mathbf{0})} = 1$, on a donc

$$\mathbf{e}_{(\mathbf{0})} = \frac{1}{c}\,\mathbf{u}.$$

Il représente donc la quadri-vitesse normalisée de l'observateur. L'espace vectoriel orthogonal à $\mathbf{e}_{(\mathbf{0})}$, et dont une base est $\{\mathbf{e}_{(\mathbf{a})}\}_{a\in[\![1,3]\!]}$, est appelé *espace local de repos de l'observateur*, ou encore *espace absolu*.

2 – Dans un espace-temps de Minkowski, de signature $(+,-,-,-)$, les vecteurs de la base naturelle associée aux coordonnées sphériques $\{t, r, \theta, \varphi\}$ sont tels que les carrés de leurs pseudo-normes s'écrivent

$$\vec{\partial}_t \cdot \vec{\partial}_t = 1, \qquad \vec{\partial}_r \cdot \vec{\partial}_r = -1,$$
$$\vec{\partial}_\theta \cdot \vec{\partial}_\theta = -r^2, \qquad \vec{\partial}_\varphi \cdot \vec{\partial}_\varphi = -r^2\,\sin^2\theta,$$

avec les pseudo-produits scalaires $\vec{\partial}_i \cdot \vec{\partial}_j = 0$ si $i \neq j$. Une tétrade orthonormée peut donc être définie par les vecteurs

$$\mathbf{e}_{(t)} = \vec{\partial}_t, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \vec{\partial}_r,$$
$$\mathbf{e}_{(\theta)} = \frac{1}{r}\,\vec{\partial}_\theta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\vec{\partial}_\varphi.$$

On notera que la tétrade obtenue n'est pas une base naturelle (ou *base coordonnée*).

3(a) – Par définition de la tétrade : $e^{\mu}_{(c)}\, e_{(b)\mu} = \eta_{cb}$. En multipliant cette égalité par η^{ab}, on a $e^{\mu}_{(c)}\, \eta^{ab}\, e_{(b)\mu} = \eta^{ab}\, \eta_{cb} = \delta^{a}_{c}$. Or, par définition de la base duale, $e^{\mu}_{(c)}\, e^{(a)}_{\mu} = \delta^{a}_{c}$. Donc, par identification des deux dernières relations,

$$e^{(a)}_{\mu} = \eta^{ab}\, e_{(b)\mu}.$$

De la même façon, on a : $e^{(c)\mu}\, e^{(b)}_{\mu} = \eta^{cb}$ implique $e^{(c)\mu}\, \eta_{ab}\, e^{(b)}_{\mu} = \eta_{ab}\, \eta^{cb} = \delta^{c}_{a}$, et $e^{(c)\mu}\, e_{(a)\mu} = \delta^{c}_{a}$, donc

$$e_{(a)\mu} = \eta_{ab}\, e^{(b)}_{\mu}.$$

Ces résultats sont importants car ils montrent que la matrice (η_{ab}) sert à abaisser ou relever les étiquettes des vecteurs de la tétrade.

3(b) – On a $e^{(a)}_{\mu} = g_{\mu\nu}\, e^{(a)\nu}$, donc en multipliant cette égalité par $e_{(a)\lambda}$, on obtient

$$g_{\mu\nu}\, e^{(a)\nu}\, e_{(a)\lambda} = e_{(a)\lambda}\, e^{(a)}_{\mu},$$

avec $e^{(a)\nu}\, e_{(a)\lambda} = \delta^{\nu}_{\lambda}$, et $e_{(a)\lambda}\, e^{(a)}_{\mu} = \eta_{ab}\, e^{(b)}_{\lambda}\, e^{(a)}_{\mu}$, d'après ce qui précède, c'est-à-dire,

$$g_{\mu\lambda} = \eta_{ab}\, e^{(a)}_{\mu}\, e^{(b)}_{\lambda}.$$

Autrement dit, la métrique peut s'écrire

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{ab}\, e^{(a)}_{\mu}\, e^{(b)}_{\nu}\, \mathrm{d}x^{\mu}\, \mathrm{d}x^{\nu}.$$

4 – Il suffit d'exprimer le pseudo-produit scalaire de deux manières : d'une part,

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{e_{(a)}} = v_{(b)}\, \mathbf{e^{(b)}} \cdot \mathbf{e_{(a)}} = v_{(b)}\, \delta^{b}_{a} = v_{(a)}\ ,$$

et d'autre part,

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{e_{(a)}} = v_{\mu}\, e^{\nu}_{(a)}\, \vec{\partial}^{\mu} \cdot \vec{\partial}_{\nu} = v_{\mu}\, e^{\nu}_{(a)}\, \delta^{\mu}_{\nu} = v_{\mu}\, e^{\mu}_{(a)},$$

donc on déduit $v_{(a)} = v_{\mu}\, e^{\mu}_{(a)}$. De la même façon, avec le pseudo-produit scalaire $\mathbf{V} \cdot \mathbf{e^{(a)}}$, on trouve $v^{(a)} = v^{\mu}\, e^{(a)}_{\mu}$. Ces relations se généralisent aisément aux tenseurs d'ordre quelconque.

5(a) – Par définition, $\nabla_{\nu}\eta_{ba} = 0$, c'est-à-dire

$$\nabla_{\nu}\left[e_{(b)\mu}\, e^{\mu}_{(a)}\right] = \nabla_{\nu} e_{(b)\mu}\, e^{\mu}_{(a)} + e_{(b)\mu}\, \nabla_{\nu} e^{\mu}_{(a)} = 0,$$

donc $\nabla_{\nu} e_{(b)\mu}\, e^{\mu}_{(a)} = -e^{\mu}_{(b)}\, \nabla_{\nu} e_{(a)\mu}$, et $\gamma_{abc} = -\gamma_{bac}$.

5(b) – Par définition du tenseur de Riemann [8],

$$(\nabla_{\lambda}\, \nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\, \nabla_{\lambda})\, e_{(a)\mu} = e^{\sigma}_{(a)}\, R_{\sigma\,\mu\,\nu\,\lambda}.$$

8. à la convention de signe près.

D'après les résultats précédents,

$$e^{\mu}_{(b)}\, e^{\nu}_{(c)}\, e^{\lambda}_{(d)}\, e^{\sigma}_{(a)}\, R_{\sigma\,\mu\,\nu\,\lambda} = R_{(a)(b)(c)(d)},$$

donc finalement

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = e^{\mu}_{(b)}\, e^{\nu}_{(c)}\, e^{\lambda}_{(d)}\, (\nabla_\lambda \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\lambda)\, e_{(a)\mu}.$$

Par ailleurs, en introduisant les coefficients γ_{abc}, on a par exemple $\nabla_\nu e_{(a)\mu} = \gamma_{aij}\, e^{(i)}_{\mu}\, e^{(j)}_{\nu}$, puis en dérivant encore une fois,

$$\begin{aligned}
\nabla_\lambda \nabla_\nu e_{(a)\mu} &= e^{(i)}_{\mu}\, e^{(j)}_{\nu}\, \nabla_\lambda\, \gamma_{aij} + \gamma_{aij}\, \nabla_\lambda\, (e^{(i)}_{\mu}\, e^{(j)}_{\nu}) \\
&= e^{(i)}_{\mu}\, e^{(j)}_{\nu}\, \nabla_\lambda\, \gamma_{aij} + \gamma_{aij}\, \left[e^{(j)}_{\nu}\, \nabla_\lambda\, e^{(i)}_{\mu} + e^{(i)}_{\mu}\, \nabla_\lambda\, e^{(j)}_{\nu} \right],
\end{aligned}$$

avec $\nabla_\lambda\, \gamma_{aij} = \partial_\lambda \gamma_{aij}$, puisque γ_{aij} est un champ scalaire, et donc

$$e^{\mu}_{(b)}\, e^{\nu}_{(c)}\, e^{\lambda}_{(d)}\, e^{(i)}_{\mu}\, e^{(j)}_{\nu}\, \nabla_\lambda\, \gamma_{aij} = \gamma_{abc,\,(d)}.$$

Enfin, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\nabla_\lambda\, e^{(i)}_{\mu} = \eta^{in}\, \nabla_\lambda e_{(n)\mu} = \eta^{in}\, \gamma_{nmk}\, e^{(m)}_{\mu}\, e^{(k)}_{\lambda} = \gamma^{i}{}_{mk}\, e^{(m)}_{\mu}\, e^{(k)}_{\lambda}, \\
&\nabla_\lambda\, e^{(j)}_{\nu} = \gamma^{j}{}_{mk}\, e^{(m)}_{\nu}\, e^{(k)}_{\lambda},
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
\gamma_{aij}\, e^{\mu}_{(b)}\, e^{\nu}_{(c)}\, e^{\lambda}_{(d)}\, e^{(j)}_{\nu}\, \nabla_\lambda\, e^{(i)}_{\mu} &= \gamma_{aic}\, \gamma^{i}{}_{bd}\,, \\
\gamma_{aij}\, e^{\mu}_{(b)}\, e^{\nu}_{(c)}\, e^{\lambda}_{(d)}\, e^{(i)}_{\mu}\, \nabla_\lambda\, e^{(j)}_{\nu} &= \gamma_{abj}\, \gamma^{j}{}_{cd}\,.
\end{aligned}$$

En permutant les indices λ et ν pour exprimer le terme contenant $\nabla_\nu \nabla_\lambda\, e_{(a)\mu}$, on détermine facilement les composantes du tenseur de Riemann :

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = \gamma_{abc,\,(d)} - \gamma_{abd,\,(c)} + \gamma_{abj}\, (\gamma^{j}{}_{cd} - \gamma^{j}{}_{dc}) + \gamma_{aic}\, \gamma^{i}{}_{bd} - \gamma_{aid}\, \gamma^{i}{}_{bc}.$$

5(c) – Par définition du tenseur de Ricci : $R_{(b)(d)} = \eta^{ac}\, R_{(a)(b)(c)(d)}$. On remarque également que $\gamma_{abc} = \frac{1}{2}\, (\lambda_{abc} + \lambda_{bca} - \lambda_{cab})$ et $\lambda_{abc} = -\lambda_{acb}$. Après quelques manipulations d'indices, on trouve donc

$$\begin{aligned}
R_{(a)(b)} = -\frac{1}{2}\, \Big(&\lambda_{ab}{}^{c}{}_{,\,(c)} + \lambda_{ba}{}^{c}{}_{,\,(c)} + \lambda^{c}{}_{ca,\,(b)} + \lambda^{c}{}_{cb,\,(a)} + \lambda^{cd}{}_{b}\, \lambda_{cda} \\
&+ \lambda^{cd}{}_{b}\, \lambda_{dca} - \frac{1}{2}\, \lambda_{b}{}^{cd}\, \lambda_{acd} + \lambda^{c}{}_{cd}\, \lambda_{ab}{}^{d} + \lambda^{c}{}_{cd}\, \lambda_{ba}{}^{d} \Big).
\end{aligned}$$

☞ **Références bibliographiques : [8], [12], [17].**

[MD] ## ■ EXERCICE 2.15

Dérivée de Fermi-Walker – Dans un espace-temps $\mathcal{E}$, muni d'un système de coordonnées $\{x^\mu\}$ où x^0 est la coordonnée temporelle, on considère un observateur $\mathcal{O}$ dont la ligne d'univers $\mathcal{L}$, d'équation $x^\mu(\tau)$, est paramétrée par son temps propre τ.

1 – On définit le quadri-vecteur vitesse unitaire $\mathbf{u}$, de l'observateur $\mathcal{O}$, par ses composantes contravariantes : $u^\mu = (1/c)\,\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau$. Montrer que le quadri-vecteur accélération unitaire $\mathbf{a}$, défini par $\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$, est tel que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = 0$. Quelle est la condition sur $\mathcal{L}$ pour que le quadri-vecteur $\mathbf{a}$ soit nul ?

2 – On suppose que $\mathcal{E}$ est munie d'une métrique dont la signature est $(+,-,-,-)$. Soit $\mathbf{v}$ un champ vectoriel sur $\mathcal{E}$. La dérivée de Fermi-Walker de $\mathbf{v}$ le long de la ligne d'univers $\mathcal{L}$ est le vecteur $\mathrm{D}^{\mathrm{FW}}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$, défini par

$$\mathrm{D}^{\mathrm{FW}}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{a}.$$

Remarque : pour une signature du type $(-,+,+,+)$, on trouvera plutôt la définition suivante : $\mathrm{D}^{\mathrm{FW}}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{u}$.

(a) Montrer : $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \Longrightarrow \mathbf{u}\cdot\mathrm{D}^{\mathrm{FW}}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = 0$.

(b) Exprimer $\mathrm{D}^{\mathrm{FW}}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$ pour un observateur $\mathcal{O}$ inertiel.

(c) Soit $\mathbf{w}$ un champ vectoriel sur $\mathcal{E}$. Montrer que si $\mathrm{D}^{\mathrm{FW}}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \vec{0}$ et $\mathrm{D}^{\mathrm{FW}}_{\mathbf{u}}\mathbf{w} = \vec{0}$, alors $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ est constant le long de $\mathcal{L}$.

3 – Soit $\{\mathbf{e}_{(\mu)}\}_{\mu\in[\![0,3]\!]}$ une tétrade orthonormée (voir exercice page 67) associée à l'observateur $\mathcal{O}$ telle que $\mathbf{e}_{(\mathbf{0})} = \mathbf{u}$. On admet que tout champ vectoriel $\mathbf{v}(\tau)$, défini en chaque point de $\mathcal{L}$ et de composantes $v^\mu(\tau)$ dans la tétrade, obéit à l'équation

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}\tau}\,\mathbf{e}_{(\mu)} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{u} + \vec{\omega}\times\mathbf{v}\,, \tag{2.9}$$

dans laquelle l'opération $\times$ désigne un produit vectoriel dans l'hyperplan orthogonal au vecteur $\mathbf{u}$, et $\vec{\omega}$ le quadri-vecteur rotation de l'observateur $\mathcal{O}$.

(a) A quelle condition $\mathrm{D}^{\mathrm{FW}}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ est égale à la dérivée par rapport à l'observateur $\mathcal{O}$, c'est-à-dire $(\mathrm{d}v^\mu/\mathrm{d}\tau)\,\mathbf{e}_{(\mu)}$?

(b) Que devient l'équation (2.9) pour un observateur $\mathcal{O}$ inertiel ? Comment s'écrit l'équation d'évolution des vecteurs de la tétrade dans le système de coordonnées $\{x^\mu\}$?

4 – Soient $T_M(\mathcal{E})$, l'espace tangent à $\mathcal{E}$ en un point M, et $\mathcal{P}_{\mathbf{u}}$, l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\mathbf{u}} : T_M(\mathcal{E}) &\longrightarrow T_M(\mathcal{E})\\ \mathbf{v} &\longmapsto \mathbf{v} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{u}.\end{aligned}$$

(a) Montrer que $\mathcal{P}_{\mathbf{u}}$ est un projecteur, et exprimer ses composantes mixtes $P^{\mu}_{\ \nu}$, dans la base naturelle associée à $\{x^\mu\}$, en fonction des composantes de $\mathbf{u}$.

(b) Montrer que si $\mathbf{v}$ est un champ vectoriel orthogonal à $\mathbf{u}$, alors

$$\mathrm{D}^{\mathrm{FW}}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \mathcal{P}_{\mathbf{u}}(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}).$$

▶ SOLUTION

1 – Le produit scalaire s'écrit simplement

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \frac{1}{2}\,\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = 0,$$

puisque, par définition, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 1$, en supposant que la signature de la métrique est $(+,-,-,-)$. Par définition encore, si $\mathcal{L}$ est une géodésique, alors le quadri-vecteur $\mathbf{u}$ est transporté parallèlement à lui-même le long de $\mathcal{L}$, ce qui se traduit par $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \vec{0}$, donc $\mathbf{a} = \vec{0}$.

2(a) – En supposant que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, le produit scalaire s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot\mathrm{D}^{\mathrm{FW}}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} &= \mathbf{u}\cdot[\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{a}]\\
&= \mathbf{u}\cdot\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\\
&= \nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{v}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

La dérivée de Fermi-Walker[9] préserve donc l'orthogonalité.

2(b) – Pour un observateur inertiel, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{L}$ est une géodésique, $\mathbf{a} = \vec{0}$ et $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \vec{0}$ implique $\mathrm{D}^{\mathrm{FW}}_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \vec{0}$.

2(c) – Il suffit de montrer que la dérivée du produit scalaire $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ suivant $\mathbf{u}$, qui est tangent à $\mathcal{L}$, est nulle :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) &= \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}\\
&= \left[\mathrm{D}^{\mathrm{FW}}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{u}\right]\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\left[\mathrm{D}^{\mathrm{FW}}_{\mathbf{u}}\mathbf{w} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\,\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{w})\,\mathbf{u}\right]\\
&= (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{w}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}) + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{w})\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\\
&= 0.
\end{aligned}$$

3(a) – L'équation (2.9) se réécrit :

$$\mathrm{D}^{\mathrm{FW}}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}\tau}\,\mathbf{e}_{(\mu)} + \vec{\omega}\times\mathbf{v}.$$

9. appelée aussi transport de Fermi.

Pour $\vec{\omega} = 0$, c'est-à-dire pour un observateur qui ne subit aucune rotation spatiale dans l'hyperplan orthogonal à $\mathbf{u}$, on a donc

$$\mathrm{D}_{\mathbf{u}}^{\mathrm{FW}} \mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}\tau}\, \mathbf{e}_{(\mu)}.$$

3(b) – Pour un observateur inertiel, $\mathbf{a} = 0$ et $\vec{\omega} = 0$, ce qui implique que la dérivée absolue est égale à la dérivée selon l'observateur :

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}\tau}\, \mathbf{e}_{(\mu)}.$$

Pour les vecteurs de la tétrade, on déduit donc

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{e}_{(\mu)} = 0,$$

ou encore, avec $\{\mathbf{e}_\lambda\}$ la base naturelle et $\mathbf{e}_{(\mu)} = e^\lambda_{(\mu)}\, \mathbf{e}_\lambda$,

$$\frac{\mathrm{d}e^\lambda_{(\mu)}}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^\lambda_{\ \alpha\beta}\, e^\alpha_{(\mu)}\, u^\beta = 0.$$

Autrement dit, les vecteurs de la tétrade sont transportés parallèlement le long de la géodésique de l'observateur.

4(a) – Tout vecteur $\mathbf{v}$ de $T_M(\mathcal{E})$ peut se décomposer en la somme d'un vecteur $\mathbf{v}_\perp$, orthogonal à $\mathbf{u}$, et d'un vecteur $\mathbf{v}_\|$, parallèle à $\mathbf{u}$. Comme $\mathbf{u}$ est unitaire, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\mathbf{u}} \circ \mathcal{P}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) &= \mathcal{P}_{\mathbf{u}} \circ \mathcal{P}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\|) \\
&= \mathcal{P}_{\mathbf{u}} \left[\mathcal{P}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_\perp) + \mathcal{P}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_\|)\right] \\
&= \mathcal{P}_{\mathbf{u}} \left[\mathbf{v}_\perp - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_\perp)\, \mathbf{u} + \mathbf{v}_\| - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_\|)\, \mathbf{u}\right] \\
&= \mathcal{P}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})\,,
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{P}_{\mathbf{u}}$ est un projecteur orthogonal sur l'hyperplan qui est normal à $\mathbf{u}$, c'est-à-dire l'hyperplan défini par les directions spatiales du référentiel de repos de l'observateur. Ces composantes mixtes s'écrivent, dans la base naturelle,

$$P^\mu_{\ \nu} = \delta^\mu_{\ \nu} - u^\mu\, u_\nu.$$

4(b) – Si $\mathbf{v}$ est orthogonal à $\mathbf{u}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{\mathbf{u}}^{\mathrm{FW}} \mathbf{v} &= \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} + (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{u} \\
&= \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} + \left[\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}\right]\, \mathbf{u} \\
&= \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v})\, \mathbf{u} \\
&= \mathcal{P}_{\mathbf{u}}(\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}).
\end{aligned}$$

☞ **Références bibliographiques : [5], [15], [16].**

[D] ■ **EXERCICE 2.16**

Hypersurfaces de l'espace-temps – Soient $\mathcal{E}$ un espace-temps muni d'une métrique $\mathbf{g}$ de signature $(-,+,+,+)$, sans torsion, et $\mathbf{T}_M(\mathcal{E})$ l'espace vectoriel tangent à $\mathcal{E}$ en un point M. Une *hypersurface* de $\mathcal{E}$ est définie comme l'image par un homéomorphisme Φ d'une variété pseudo-riemannienne de dimension 3. Soit Σ une hypersurface de $\mathcal{E}$ telle que l'on peut définir un système de coordonnées $\{x^\mu\}_{\mu\in[\![0,3]\!]}$ sur $\mathcal{E}$ qui, à tout point $\tilde{M}$ de $\tilde{\Sigma} = \Phi^{-1}(\Sigma)$ de coordonnées (x^1, x^2, x^3), fait correspondre un point M de Σ de coordonnées $(0, x^1, x^2, x^3)$. On choisira x^0 comme coordonnée temporelle. La métrique γ induite sur Σ, appelée aussi *première forme fondamentale de* Σ, est alors définie par : $\forall(i,j) \in [\![1,3]\!]$, $\gamma_{ij} = g_{ij}$.

1 – Quel est le genre d'une hypersurface Σ ainsi définie ? Quelle équation cartésienne admet Σ au voisinage d'un point M de coordonnées $(0, x^1, x^2, x^3)$? En déduire un vecteur unitaire $\vec{n}$ orthogonal à l'espace vectoriel tangent $\mathbf{T}_M(\Sigma)$ à Σ en M, et montrer que ce vecteur est de genre temps.

2 – Quelles sont les composantes mixtes, dans la base naturelle, du tenseur $\mathbf{P}$ associé au projecteur orthogonal $\mathcal{P}$ de $\mathbf{T}_M(\mathcal{E})$ sur $\mathbf{T}_M(\Sigma)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\vec{n})$? En déduire les composantes covariantes. Quel est le lien avec le tenseur métrique γ ?

De la même façon, on définira le projecteur orthogonal $\mathcal{P}^\star$ de $\mathbf{T}^\star_M(\mathcal{E})$, dual de $\mathbf{T}_M(\mathcal{E})$, sur $\mathbf{T}^\star_M(\Sigma)$, dual de $\mathbf{T}_M(\Sigma)$, parallèlement à $\mathrm{Vect}(\mathbf{n})$, $\mathbf{n}$ étant la forme linéaire associée à $\vec{n}$ par dualité métrique (voir exercice page 8).

3 – Un tenseur $\mathbf{T}$ est dit *tangent à* Σ si, par définition, $\mathbf{T}(\ldots,\vec{n},\ldots) \equiv 0$, ou $\mathbf{T}(\ldots,\mathbf{n},\ldots) \equiv 0$.

(a) Montrer que $\mathbf{P}$ est un tenseur tangent à Σ.

(b) Soit $\mathbf{T}$ un tenseur de type $\binom{p}{q}$. Montrer que le tenseur $\mathbf{PT}$ dont les composantes sont définies par

$$PT^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q} = P^{\mu_1}{}_{\alpha_1}\ldots P^{\mu_p}{}_{\alpha_p}\, P^{\beta_1}{}_{\nu_1}\ldots P^{\beta_q}{}_{\nu_q}\, T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q},$$

est un tenseur tangent à Σ.

(c) Exprimer $\mathbf{PT}$ en fonction de $\mathbf{T}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^\star$.

4 – On définit l'endomorphisme $\mathcal{S}$ de $\mathbf{T}_M(\Sigma)$ tel que

$$\begin{array}{rccc} S : & \mathbf{T}_M(\Sigma) & \longrightarrow & \mathbf{T}_M(\Sigma) \\ & \vec{u} & \longmapsto & \nabla_{\vec{u}}\vec{n}. \end{array}$$

Vérifier que $\mathcal{S}(\vec{u})$ appartient à $\mathbf{T}_M(\Sigma)$, et montrer que $\mathcal{S}$ est auto-adjoint c'est-à-dire que, $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \mathbf{T}^2_M(\Sigma)$, $\mathbf{g}(\vec{u},\mathcal{S}(\vec{v})) = \mathbf{g}(\mathcal{S}(\vec{u}),\vec{v})$.

5 – On définit le *tenseur de courbure extrinsèque* de Σ (appelé aussi *seconde forme fondamentale* de Σ), noté $\mathbf{K}$, par

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{K} : \mathbf{T}_M(\Sigma)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \longmapsto & -\mathbf{g}(\vec{u}, \mathcal{S}(\vec{v})),\end{array}$$

et son extension $\mathbf{K}^\star$ dans $\mathbf{T}_M(\mathcal{E})$ par

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{K}^\star : \mathbf{T}_M(\mathcal{E})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \longmapsto & \mathbf{K}(\mathcal{P}(\vec{u}), \mathcal{P}(\vec{v})).\end{array}$$

On notera $\mathbf{\Phi}^\star$, l'application qui à un tenseur (ou forme multilinéaire) $\mathbf{T}$ agissant sur Σ associe $\mathbf{T}^\star$, l'extension de $\mathbf{T}$ sur $\mathcal{E}$.

(a) En posant $\vec{a} = \nabla_{\vec{n}}\vec{n}$, montrer que les composantes covariantes de $\mathbf{K}^\star$ s'écrivent

$$K^\star_{\mu\nu} = -\nabla_\nu n_\mu - a_\mu\, n_\nu .$$

(b) En déduire que $\mathbf{K}^\star = -\mathbf{P}\nabla\mathbf{n}$, et déterminer la trace de $\mathbf{K}^\star$.

(c) Montrer que $\mathbf{K}^\star$ est symétrique.

6 – Pour tout champ tensoriel $\mathbf{T}$ défini sur Σ, le tenseur dérivée covariante $\mathbf{DT}$ de $\mathbf{T}$, relatif à la connexion de Levi-Civita $\mathbf{D}$ définie sur Σ c'est-à-dire relatif à la métrique γ, est tel que

$$\mathbf{\Phi}^\star(\mathbf{DT}) = \mathbf{P}\nabla\left[\mathbf{\Phi}^\star(\mathbf{T})\right] ,$$

avec ∇ la connexion de Levi-Civita sur $\mathcal{E}$.

(a) Ecrire les composantes $(\mathbf{D}^\star\mathbf{T}^\star)_\alpha{}^\mu{}_\nu$ de $\mathbf{D}^\star\mathbf{T}^\star$, avec $\mathbf{D}^\star = \mathbf{P}\nabla$ et $\mathbf{T}$ un tenseur de type $\binom{1}{1}$, en fonction des composantes de $\nabla\mathbf{T}^\star$. Que devient cette expression pour un champ scalaire f ? Et pour un champ vectoriel ?

(b) Montrer que, $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbf{T}^2_M(\Sigma)$,

$$\mathbf{D}^\star_{\vec{u}}\vec{v} = \nabla_{\vec{u}}\vec{v} + \mathbf{K}(\vec{u}, \vec{v})\,\vec{n} ,$$

où l'on a identifié $\mathbf{K}$ à son extension $\mathbf{K}^\star$.

▶ SOLUTION

1 – Si la signature de la métrique $\mathbf{g}$ est $(-,+,+,+)$, alors celle de la métrique γ est $(+,+,+)$. Pour tout vecteur $\vec{v}$ de l'espace vectoriel tangent $\mathbf{T}_M(\Sigma)$ à Σ en M, on a donc $\mathbf{g}(\vec{v}, \vec{v}) = \gamma_{ij} v^i\, v^j > 0$, et $\vec{v}$ est de genre espace. Autrement dit, l'hypersurface Σ est de genre espace. Une représentation paramétrique quelconque de Σ peut être définie en posant : $\forall(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, $x^0(u, v, w) = 0$, $x^1(u, v, w) = u$, $x^2(u, v, w) = v$, et

$x^3 = w$. Ainsi, une équation cartésienne de Σ au voisinage de M peut s'écrire

$$x^0(x^1, x^2, x^3) = 0.$$

Un vecteur orthogonal à $\mathbf{T}_M(\Sigma)$ est donc défini, en tout point régulier M de Σ, par le gradient $\vec{\nabla} x^0$, de composantes contravariantes $g^{\mu\nu}\,\partial_\nu x^0$, dans la base naturelle $\{\vec{\partial}_\mu\}_{\mu\in[\![0,3]\!]}$ (associée au système de coordonnées $\{x^\mu\}_{\mu\in[\![0,3]\!]}$). L'hypersurface Σ étant de genre espace, ce vecteur est de genre temps : en effet, si $\vec{\partial}_0$ n'est pas nécessairement orthogonal aux autres vecteurs de la base naturelle, le vecteur $\vec{\nabla} x^0$ est, par définition, orthogonal aux vecteurs $\vec{\partial}_i$ pour $i \in [\![1,3]\!]$, puisque ces derniers forment une base de $\mathbf{T}_M(\Sigma)$. Dans un voisinage de M, on peut toujours définir des coordonnées localement cartésiennes et donc former une base naturelle orthonormée $\{\vec{e}_\mu\}_{\mu\in[\![0,3]\!]}$, telle que $\{\vec{e}_i\}_{i\in[\![1,3]\!]}$ soit une base de $\mathbf{T}_M(\Sigma)$. Dans cette nouvelle base, $\vec{\nabla} x^0$ est colinéaire à $\vec{e}_0$, et le tenseur métrique est tel que les seules composantes non nulles sont $g_{00} = -1$, et $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$: on a donc $\mathbf{g}(\vec{\nabla} x^0, \vec{\nabla} x^0) < 0$. Ainsi, un vecteur unitaire $\vec{n}$, lui aussi de genre temps, peut être défini en normalisant $\vec{\nabla} x^0$: on pose

$$\vec{n} = \left[-\mathbf{g}(\vec{\nabla} x^0, \vec{\nabla} x^0)\right]^{-1/2}\,\vec{\nabla} x^0,$$

et l'on a bien $\mathbf{g}(\vec{n}, \vec{n}) = -1$.

2 – L'espace vectoriel $\mathbf{T}_M(\mathcal{E})$ se décompose en somme directe orthogonale selon la relation : $\mathbf{T}_M(\mathcal{E}) = \mathbf{T}_M(\Sigma) \oplus \mathrm{Vect}(\vec{n})$. Le projecteur $\mathcal{P}$ est tel que $\forall \vec{v} \in \mathbf{T}_M(\mathcal{E})$, on a

$$\mathcal{P}(\vec{v}) = \vec{v} + \mathbf{g}(\vec{n}, \vec{v})\,\vec{n}\,,$$

le signe + étant directement dû à la signature de la métrique. On retrouve bien que $\mathcal{P}(\vec{n}) = 0$. Les composantes mixtes du tenseur $\mathbf{P}$ associé à $\mathcal{P}$ s'écrivent

$$P^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + n^\mu\,n_\nu.$$

On en déduit les composantes covariantes :

$$P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu\,n_\nu.$$

Le tenseur $\mathbf{P}$ permet de définir une extension $\gamma^\star$ du tenseur métrique γ dans l'espace $\mathbf{T}_M(\mathcal{E})$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \gamma^\star : \mathbf{T}_M(\mathcal{E})^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longmapsto \gamma(\mathcal{P}(\vec{u}), \mathcal{P}(\vec{v})). \end{aligned}$$

Autrement dit, comme $\gamma(\mathcal{P}(\vec{u}), \mathcal{P}(\vec{v})) = \mathbf{g}(\mathcal{P}(\vec{u}), \mathcal{P}(\vec{v}))$ et que $\mathcal{P}\circ\mathcal{P} = \mathcal{P}$ (ce qui équivaut à $P^\mu{}_\alpha P^\alpha{}_\nu = P^\mu{}_\nu$), on peut aussi écrire : $\forall(\mu,\nu) \in [\![0,3]\!]^2$, $\gamma^\star_{\mu\nu} = P^\alpha{}_\mu\,P^\beta{}_\nu\,g_{\alpha\beta} = P_{\mu\nu}$, ou encore $\gamma^{\star\mu}_{\nu} = P^\mu{}_\nu$. En identifiant γ et $\gamma^\star$, on peut dire que le tenseur métrique γ est égal au tenseur $\mathbf{P}$. Néanmoins, dans la suite de cet exercice, nous continuerons à utiliser $\mathbf{P}$ et ses coordonnées pour garder à l'esprit le fait qu'il s'agit d'un projecteur.

3(a) – Par définition, $\forall \vec{u} \in \mathbf{T}_M(\mathcal{E})$,

$$\mathbf{P}(\vec{n}, \vec{u}) = g_{\mu\nu}\, n^\mu\, u^\nu + n_\mu\, n_\nu\, n^\mu\, u^\nu = \mathbf{g}(\vec{n}, \vec{u}) - \mathbf{g}(\vec{n}, \vec{u}) = 0.$$

3(b) – Pour simplifier l'écriture, regardons ce qui passe pour un tenseur $\mathbf{T}$ de type $\binom{1}{1}$. En notant $\{\mathbf{e}_\mu\}_{\mu\in[\![0,3]\!]}$ et $\{\mathbf{e}^\mu\}_{\mu\in[\![0,3]\!]}$, respectivement une base naturelle de $\mathbf{T}_M(\mathcal{E})$ et sa base duale, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{PT}(\cdot, \vec{n}) &= PT^\mu{}_\nu \; < e^\nu, \vec{n} > \; \mathbf{e}_\mu \\ &= P^\mu{}_\alpha\, P^\beta{}_\nu\, T^\alpha{}_\beta\, n^\nu\, \mathbf{e}_\mu\,,\end{aligned}$$

et comme $P^\beta{}_\nu\, n^\nu = (\delta^\beta{}_\nu + n^\beta\, n_\nu)\, n^\nu = n^\beta - n^\beta = 0$, on trouve $\mathbf{PT}(\cdot, \vec{n}) \equiv 0$. La généralisation à un tenseur de type $\binom{p}{q}$ est immédiate.

3(c) – $\forall \vec{u} \in \mathbf{T}_M(\mathcal{E})$, $\vec{u}$ se décompose dans la base $\{\vec{n}, \vec{\partial}_i\}_{i\in[\![1,3]\!]}$ de la façon suivante : $\vec{u} = u^i\, \vec{\partial}_i + \lambda\, \vec{n}$. De même, $\forall \omega \in \mathbf{T}^\star_M(\mathcal{E})$, on peut décomposer ω dans la base $\{\mathbf{n}, \partial^i\}_{i\in[\![1,3]\!]}$: $\omega = \omega_i\, \partial^i + \lambda^\star\, \mathbf{n}$. Par linéarité du tenseur $\mathbf{PT}$, on écrit alors

$$\begin{aligned}\mathbf{PT}(\omega, \vec{u}) &= \mathbf{PT}(\omega_i\, \partial^i + \lambda^\star\, \mathbf{n}, u^i\, \vec{\partial}_i + \lambda\, \vec{n}) \\ &= \mathbf{PT}(\omega_i\, \partial^i, u^i\, \vec{\partial}_i + \lambda\, \vec{n}) + \lambda^\star\, \mathbf{PT}(\mathbf{n}, u^i\, \vec{\partial}_i + \lambda\, \vec{n}) \\ &= \mathbf{PT}(\omega_i\, \partial^i, u^i\, \vec{\partial}_i) + \lambda\, \mathbf{PT}(\omega_i\, \partial^i, \vec{n}) \\ &= \mathbf{PT}(\omega_i\, \partial^i, u^i\, \vec{\partial}_i)\,,\end{aligned}$$

puisque $\mathbf{PT}(\mathbf{n}, u^i\, \vec{\partial}_i + \lambda\, \vec{n}) = \mathbf{PT}(\omega_i\, \partial^i, \vec{n}) = 0$. Ainsi, la dernière égalité équivaut à

$$\mathbf{PT}(\omega, \vec{u}) = \mathbf{T}(\mathcal{P}^\star(\omega), \mathcal{P}(\vec{u})).$$

4 – Par définition de $\mathcal{S}$, on peut écrire

$$\vec{n} \cdot \nabla_{\vec{u}} \vec{n} = \frac{1}{2}\, \nabla_{\vec{u}}(\mathbf{g}(\vec{n}, \vec{n})) = 0\,,$$

puisque $\mathbf{g}(\vec{n}, \vec{n}) = -1$. Le vecteur $\mathcal{S}(\vec{u})$ est donc orthogonal à $\vec{n}$ et appartient à $\mathbf{T}_M(\Sigma)$. De plus, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(\vec{u}, \mathcal{S}(\vec{v})) &= \vec{u} \cdot \nabla_{\vec{v}} \vec{n} \\ &= \nabla_{\vec{v}}(\vec{u} \cdot \vec{n}) - \vec{n} \cdot \nabla_{\vec{v}} \vec{u},\end{aligned}$$

avec $\nabla_{\vec{v}}(\vec{u} \cdot \vec{n}) = 0$, puisque $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, et

$$\vec{n} \cdot \nabla_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{n} \cdot (\nabla_{\vec{u}} \vec{v} - [\vec{u}, \vec{v}])\,.$$

Or, comme $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, $\vec{n} \cdot \nabla_{\vec{u}} \vec{v} = \nabla_{\vec{u}}(\vec{n} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{u}} \vec{n} = -\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{u}} \vec{n}$. Enfin, on a

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot [\vec{u}, \vec{v}] &= n_\mu (u^\nu\, \nabla_\nu v^\mu - v^\nu\, \nabla_\nu u^\mu) \\ &= u^\nu\; [\nabla_\nu(n_\mu\, v^\mu) - v^\mu\, \nabla_\nu n_\mu] - v^\nu\; [\nabla_\nu(n_\mu\, u^\mu) - u^\mu\, \nabla_\nu n_\mu] \\ &= u^\mu\, v^\nu\, \nabla_\nu n_\mu - u^\nu\, v^\mu\, \nabla_\nu n_\mu \\ &= u^\mu\, v^\nu\; [\nabla_\nu n_\mu - \nabla_\mu n_\nu]\,,\end{aligned}$$

et comme $\vec{n}$ est colinéaire à $\vec{\nabla}x^0$ (voir question précédente),

$$\nabla_\nu n_\mu - \nabla_\mu n_\nu = \alpha \left[\nabla_\nu \nabla_\mu x^0 - \nabla_\mu \nabla_\nu x^0\right],$$

en notant $\vec{n} = \alpha \vec{\nabla}x^0$. Le tenseur de torsion étant identiquement nul (voir exercice page 23),

$$\nabla_\nu \nabla_\mu x^0 - \nabla_\mu \nabla_\nu x^0 = 0.$$

Conclusion, le seul terme restant étant $\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{u}} \vec{n}$, on a montré que

$$\mathbf{g}(\vec{u}, \mathcal{S}(\vec{v})) = \mathbf{g}(\mathcal{S}(\vec{u}), \vec{v}).$$

5(a) – Par définition de l'extension du tenseur de courbure extrinsèque, pour tout $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbf{T}_M(\mathcal{E})^2$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^\star(\vec{u}, \vec{v}) &= \mathbf{K}(\mathcal{P}(\vec{u}), \mathcal{P}(\vec{v})) \\
&= -\mathcal{P}(\vec{u}) \cdot \nabla_{\mathcal{P}(\vec{v})} \vec{n} \\
&= -\left[\vec{u} + \mathbf{g}(\vec{n}, \vec{u})\, \vec{n}\right] \left[\nabla_{\vec{v}} \vec{n} + \mathbf{g}(\vec{n}, \vec{v})\, \nabla_{\vec{n}} \vec{n}\right] \\
&= -\vec{u} \cdot \nabla_{\vec{v}} \vec{n} - (\vec{n} \cdot \vec{v})\, (\vec{u} \cdot \vec{a}),
\end{aligned}$$

avec $\vec{a} = \nabla_{\vec{n}} \vec{n}$, et puisque $\vec{n} \cdot \nabla_{\vec{v}} \vec{n} = (1/2) \nabla_{\vec{v}} (\vec{n} \cdot \vec{n}) = 0$ pour tout vecteur $\vec{v}$. Autrement dit, par définition de la connexion, comme

$$\vec{u} \cdot \nabla_{\vec{v}} \vec{n} = u_\mu\, v^\nu\, \nabla_\nu n^\mu = \nabla \mathbf{n}(\vec{u}, \vec{v}),$$

on obtient

$$\mathbf{K}^\star = -\nabla \mathbf{n} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{n},$$

avec $\mathbf{a}$ la forme linéaire associée à $\vec{a}$. Les coordonnées covariantes sont donc

$$K^\star_{\mu\nu} = -\nabla_\nu n_\mu - a_\mu\, n_\nu. \tag{2.10}$$

Remarque : comme $a_0 = 0$ et $[n_\mu] = (-\alpha, 0, 0, 0)$, $K^\star_{0\mu} = K^\star_{\mu 0} = 0$.

5(b) – On a

$$\begin{aligned}
(\mathbf{P}\nabla \mathbf{n})_{\mu\nu} &= P^\alpha{}_\mu\, P^\beta{}_\nu\, \nabla_\beta n_\alpha \\
&= (\delta^\alpha{}_\mu + n^\alpha\, n_\mu)\, (\delta^\beta{}_\nu + n^\beta\, n_\nu)\, \nabla_\beta n_\alpha \\
&= \nabla_\nu n_\mu + n_\nu\, n^\beta\, \nabla_\beta n_\mu + n_\mu\, n^\alpha\, \nabla_\nu n_\alpha + n^\alpha\, n^\mu\, n_\nu\, n^\beta\, \nabla_\beta n^\alpha \\
&= \nabla_\nu n_\mu + n_\nu\, n^\beta\, \nabla_\beta n_\mu \\
&= \nabla_\nu n_\mu + a_\mu\, n_\nu\,,
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathbf{K}^\star = -\mathbf{P}\nabla \mathbf{n}$.

Remarque : par définition, $\mathbf{K}^\star$ est bien tangent à Σ.

La trace de $\mathbf{K}^\star$ s'obtient en contractant les composantes $K^\star_{\mu\nu}$ avec les composantes $g^{\mu\nu}$ du tenseur métrique :

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{K}^\star) = g^{\mu\nu}\, K^\star_{\mu\nu} = \nabla_\nu n^\nu + a^\nu\, n_\nu,$$

avec $a^\nu\, n_\nu = \vec{a}\cdot\vec{n} = 0$. La trace de $\mathbf{K}^\star$ est donc égale à la divergence du vecteur $\vec{n}$: $\mathrm{Tr}(\mathbf{K}^\star) = \nabla\cdot\vec{n}$.

Remarque : d'après les coordonnées de $\mathbf{K}^\star$, on a également : $\mathrm{Tr}(\mathbf{K}^\star) = \gamma_{ij}\, K^{ij}$, avec $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$.

5(c) – Comme $\mathbf{K}^\star = -\mathbf{P}\nabla\mathbf{n}$, la différence $K^\star_{\mu\nu} - K^\star_{\nu\mu}$ s'écrit

$$\begin{aligned} K^\star_{\mu\nu} - K^\star_{\nu\mu} &= P^\alpha{}_\nu\, P^\beta{}_\mu\, \nabla_\beta n_\alpha - P^\alpha{}_\mu\, P^\beta{}_\nu\, \nabla_\beta n_\alpha \\ &= P^\alpha{}_\nu\, P^\beta{}_\mu\, (\nabla_\beta n_\alpha - \nabla_\alpha n_\beta) \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

puisque, d'après les résultats précédents, $\nabla_\mu n_\nu - \nabla_\nu n_\mu = 0$. Le tenseur $\mathbf{K}^\star$ est donc bien symétrique.

6(a) – Par définition, $\mathbf{D}^\star\mathbf{T}^\star = \mathbf{\Phi}^\star(\mathbf{DT})$, ce qui conduit à

$$(\mathbf{D}^\star\mathbf{T}^\star)_\alpha{}^\mu{}_\nu = P^\mu{}_\lambda\, P^\sigma{}_\nu\, P^\beta{}_\alpha\, \nabla_\beta T^{\star\lambda}{}_\sigma.$$

Pour un champ scalaire f, l'expression devient simplement

$$\begin{aligned} (D^\star f)_\mu = P^\nu{}_\mu\, \nabla_\nu f &= (\delta^\nu{}_\mu + n^\nu\, n_\mu)\, \nabla_\nu f \\ &= \nabla_\mu f + (n^\nu\, n_\mu)\, \nabla_\nu f\,. \end{aligned}$$

Enfin, pour un champ vectoriel $\vec{v} = [v^\mu]$, on a

$$\begin{aligned} (D^\star\vec{v})_\nu^\mu = D_\nu v^\mu &= P^\alpha{}_\nu\, P^\mu{}_\beta\, \nabla_\alpha v^\beta \\ &= \nabla_\nu v^\mu + n^\alpha\, n_\nu\, \nabla_\alpha v^\mu + n^\mu\, n_\beta\, \nabla_\nu v^\beta \\ &\quad + n^\alpha\, n_\nu\, n^\mu\, n_\beta\, \nabla_\alpha v^\beta. \end{aligned} \tag{2.11}$$

6(b) – Pour tout $(\vec{u},\vec{v}) \in \mathbf{T}^2_M(\Sigma)$,

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}^\star_{\vec{u}}\vec{v})^\mu = u^\nu\, D_\nu v^\mu &= u^\nu\, P^\alpha_{\ \nu}\, P^\mu_{\ \beta}\, \nabla_\alpha\, v^\beta \\ &= u^\alpha\, (\delta^\mu{}_\beta + n^\mu\, n_\beta)\, \nabla_\alpha v^\beta \\ &= u^\alpha\, \nabla_\alpha v^\mu + n^\mu\, u^\alpha\, n_\beta\, \nabla_\alpha v^\beta\,, \end{aligned}$$

avec $u^\nu\, P^\alpha_{\ \nu} = u^\alpha$, et $n_\beta\, \nabla_\alpha v^\beta = -v^\beta\, \nabla_\alpha n_\beta$ puisque $\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$. Ainsi, on obtient

$$(\mathbf{D}^\star_{\vec{u}}\vec{v})^\mu = u^\alpha\, \nabla_\alpha v^\mu - n^\mu\, u^\alpha\, v^\beta\, \nabla_\alpha n_\beta,$$

ce qui, avec $-u^\alpha\, v^\beta\, \nabla_\alpha n_\beta = \mathbf{K}(\vec{u},\vec{v})$, donne finalement

$$\mathbf{D}^\star_{\vec{u}}\vec{v} = \nabla_{\vec{u}}\vec{v} + \mathbf{K}(\vec{u},\vec{v})\,\vec{n}.$$

☞ **Références bibliographiques : [28], [31], [32], [17].**

[D] ■ EXERCICE 2.17

Equations de Gauss et Codazzi – Soient $\mathcal{E}$ un espace-temps muni d'une métrique $\mathbf{g}$ de signature $(-,+,+,+)$, sans torsion, et $\mathbf{T}_M(\mathcal{E})$ l'espace vectoriel tangent à $\mathcal{E}$ en un point M. Soient Σ une hypersurface de $\mathcal{E}$, de genre espace, munie d'une métrique induite γ, et $\vec{n}$ un champ vectoriel unitaire et orthogonal à Σ. On reprend les notations de l'exercice précédent, mais on notera $\mathbf{D}$ l'extension sur $\mathcal{E}$ de la connexion de Levi-Civita sur Σ (définie par rapport à γ), telle que, $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \mathbf{T}^2_M(\Sigma)$,

$$\mathbf{D}_{\vec{u}}\vec{v} = \nabla_{\vec{u}}\vec{v} + \mathbf{K}(\vec{u},\vec{v})\,\vec{n},$$

avec $\mathbf{K}$ le tenseur de courbure extrinsèque de Σ étendu à $\mathcal{E}$ et défini par $\mathbf{K} = -\mathbf{P}\,\nabla\mathbf{n}$. On notera $K = K^i{}_i$, avec $i \in [\![1,3]\!]$, sa trace relativement à γ.

1 – Montrer que les composantes mixtes du tenseur $\mathbf{P}$, associé au projecteur orthogonal $\mathcal{P}$ de $\mathbf{T}_M(\mathcal{E})$ sur $\mathbf{T}_M(\Sigma)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\vec{n})$, sont telles que

$$\nabla_\mu P^\alpha{}_\nu = \nabla_\mu n^\alpha\, n_\nu + n^\alpha\,\nabla_\mu n_\nu.$$

2 – Pour tout champ vectoriel $\vec{v} = [v^\mu]$ tangent à Σ, montrer que

$$D_\alpha D_\beta v^\mu = -K_{\alpha\beta}\,P^\mu{}_\lambda\,n^\sigma\,\nabla_\sigma v^\lambda - K^\mu{}_\alpha\,K_{\beta\lambda}\,v^\lambda + P^\nu{}_\alpha\,P^\sigma{}_\beta\,P^\mu{}_\lambda\,\nabla_\nu\nabla_\sigma v^\lambda.$$

3 – On définit le tenseur de Riemann relativement à la connexion $\mathbf{D}$ dont les composantes $\tilde{R}^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ vérifient l'identité de Ricci telle que, pour tout champ vectoriel $\vec{v} = [v^\mu]$ tangent à Σ,

$$(D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha)\,v^\mu = \tilde{R}^\mu{}_{\nu\alpha\beta}\,v^\nu.$$

(a) Montrer l'*équation de Gauss* qui est

$$P^\mu{}_\alpha\,P^\nu{}_\beta\,P^\gamma{}_\rho\,P^\sigma{}_\lambda\,R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \tilde{R}^\gamma{}_{\lambda\alpha\beta} + K^\gamma{}_\alpha\,K_{\lambda\beta} - K^\gamma{}_\beta\,K_{\alpha\lambda},$$

en notant $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ les composantes du tenseur de Riemann relativement à la connexion ∇.

(b) En déduire les deux équations suivantes :

$$P^\mu{}_\alpha\,P^\nu{}_\beta\,R_{\mu\nu} + P_{\alpha\mu}\,P^\rho{}_\beta\,n^\nu\,n^\sigma\,R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \tilde{R}_{\alpha\beta} + K\,K_{\alpha\beta} - K_{\alpha\mu}\,K^\mu{}_\beta\,, \qquad (2.12)$$

$$R + 2R_{\mu\nu}\,n^\mu\,n^\nu = \tilde{R} + K^2 - K_{ij}\,K^{ij}\,,$$

avec $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $R_{\mu\nu}$ et $\tilde{R}_{\alpha\beta}$ les composantes des tenseurs de Ricci associés respectivement aux tenseurs de Riemann précédents, et R et $\tilde{R}$ leurs traces associées respectivement aux métriques $\mathbf{g}$ et γ.