

**TURBULENCE  
ET  
DÉTERMINISME**

Julian HUNT  
Yves COLIN DE VERDIÈRE  
Jean-Pierre HANSEN & Karim HELAL  
Marcel LESIEUR  
Guy PELLETIER  
René MOREAU  
Jacques DEMONGEOT  
Jean GAYON

**Presses Universitaires de Grenoble**

**1998**

# **EXTRAITS**

## PRÉFACE

Ce livre est très largement basé sur les actes d'un séminaire interdisciplinaire de l'Institut Universitaire de France (IUF)<sup>1</sup> sur le thème *Turbulence et Déterminisme*, qui a eu lieu à Grenoble les 23 et 24 Janvier 1997, dans l'amphithéâtre Antoine Craya de l'Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique et Mécanique de l'INP-Grenoble. Le but de ce séminaire était de rassembler des spécialistes éminents dans des domaines aussi divers que la météorologie, les mathématiques, la mécanique, la physique et l'astrophysique, la biologie et la philosophie, afin d'échanger nos compétences et réfléchir ensemble sur les convergences possibles dans nos modes d'analyse.

Pourquoi "Turbulence et Déterminisme" ? Pour donner un exemple, la turbulence dans les fluides a été pendant longtemps associée à l'imprévisibilité temporelle totale et au désordre spatial maximal, en sorte que seules les analyses et modélisations statistiques, telles que celles proposées par les glorieux précurseurs ayant pour nom Boussinesq, Reynolds, Richardson, Prandtl, Taylor ou Kolmogorov, semblaient pouvoir permettre de l'appréhender. C'est à-propos de la turbulence que Kolmogorov a construit la théorie mathématique des fonctions aléatoires. Et pourtant, les trente dernières années ont vu s'imposer un nouveau point de vue, basé à la fois sur des observations expérimentales et le développement de résolutions numériques fines des équations du mouvement, où ce désordre apparent s'accompagne d'une très forte structuration spatiale au sein des écoulements, avec la présence de "tourbillons" ou structures cohérentes, véritable "morphogénèse" au sein du chaos. Ces tourbillons, dont on ne maîtrise pas toujours les conditions de formation, sont à la fois déterministes et imprévisibles, et ils partagent certaines caractéristiques communes avec le "chaos déterministe" dans les systèmes dynamiques mis en évidence par l'illustre Henri Poincaré il y a plus d'un siècle.

Ce dernier a souvent pris des exemples en météorologie pour discuter de phénomènes que le public considère comme des conséquences du hasard (une averse, ou le passage d'un cyclone), et qui seraient en fait exactement prévisibles si on connaissait en détail les conditions initiales du système météorologique aboutissant au phénomène. Il s'agit en fait du déterminisme au sens laplacien, comme l'explique le philosophe Jean Gayon au chapitre VIII.

Il était donc naturel de commencer le livre par une discussion sur la prévision de l'environnement et du climat. C'est l'objet du chapitre I, où Julian Hunt distingue les prévisions déterministes à court terme ("prévisions du premier type", à l'échelle

---

<sup>1</sup> L'IUF regroupe environ deux cent vingt enseignants-chercheurs universitaires sur toute la France ("juniors" et "seniors", toutes disciplines confondues), nommés par le Ministre de l'Education Nationale, la Recherche et la Technologie sur proposition d'un jury de personnalités, sur la base de leur rayonnement international de recherche. Son but est de promouvoir l'excellence et l'interdisciplinarité dans les universités, vulgariser les résultats de la recherche au sein du public, et conseiller le Ministère sur les grandes orientations relatives à l'enseignement et la recherche.

Prévoir le temps et, plus généralement, l'environnement, continue à être critiqué et incompris, en particulier quand de nouveaux développements sont introduits. Ce fut le cas quand les prévisions météorologiques à long terme et saisonnières et les prédictions sur les changements climatiques ont commencé. Présenter les prévisions de l'environnement sous forme probabiliste en est un autre exemple.

Les prévisionnistes et ceux qui les dirigent prennent rarement le temps d'expliquer les principes et méthodes guidant la prévision. C'est peut-être d'une part pour éviter le scepticisme continu de la communauté scientifique, et d'autre part que la plupart de leurs clients sont raisonnablement satisfaits. Ce texte veut contribuer à définir quels sont les enjeux qui méritent le plus discussion et approfondissement, dans la mesure où les méthodes de prévision sont développées pour des chaînes de phénomènes de l'environnement de plus en plus longues reliées à des activités sociales et économiques. Un exemple important est le couplage de la prévision du temps et de la circulation automobile pour fournir les données nécessaires au calcul de la chimie atmosphérique, qui conduit à des prévisions de la couche d'ozone ; ces données sont alors transmises au public et aux organismes de gestion urbaine, qui ont ainsi toute l'information requise pour agir de façon appropriée. Il est généralement reconnu que, au fur et à mesure que l'économie progresse, la productivité et le profit de beaucoup d'activités dépendent de plus en plus des informations et prévisions concernant l'environnement : des exemples sont la réduction des matériaux en excès et des temps de transport dans la construction et les transports, et l'utilisation optimale de méthodes de haute technologie dans l'agriculture, qui continuent à être très sensibles au temps (Maunder, 1970).

Au dix-neuvième siècle et pendant presque tout le vingtième siècle, les prévisions météorologiques étaient en général données pour moins de deux jours. Elles étaient basées sur des données courantes qui étaient interprétées à l'aide de règles empiriques et de certains principes issus de la science de la météorologie naissante (Fitzroy, 1863). Les prévisionnistes ne savaient pas grand chose sur les limitations d'une prédiction. Beaucoup de météorologues, y compris Fitzroy et le Norvégien V. Bjerknes, avaient réfléchi pour savoir comment le raisonnement mathématique pouvait améliorer la prévision. Ce n'est que longtemps après, en 1922, que L.F. Richardson proposa un schéma qui pourrait permettre des calculs prédictifs des changements du temps. Il était basé sur sa méthode approchée de résolution des équations appropriées qui gouvernent la dynamique et la thermodynamique de l'atmosphère. Richardson envisagea que ces prédictions pourraient un jour et après suffisamment d'efforts être aussi précises que celles concernant le mouvement des planètes et des étoiles<sup>2</sup>.

Aussitôt que les ordinateurs furent disponibles, c'est-à-dire dans les années 1950, quelques prédictions sur des champs météorologiques à grande échelle reconnaissables commencèrent à apparaître. Mais E. N. Lorenz (1963) découvrit très vite qu'il ne

---

<sup>2</sup> Ses propres calculs étaient basés sur un nombre limité de données, et, sans ordinateur électronique pour les faire, n'étaient pas assez raffinés ; ils n'auraient donc pas pu donner une prédiction précise, même s'il avait réalisé la nécessité de filtrer les oscillations dans les équations (Lynch, 1993).

Un autre exemple remarquable est celui du groupe  $SL_2(\mathbf{Z})$ , prototype du cas *arithmétique* (on verra plus tard que si, du point de vue classique, le cas arithmétique est normal, il n'en est pas de même du point de vue quantique).

### 2.1. LE FLOT GÉODÉSIQUE

On considère tout d'abord, comme Newton, un espace des phases qui est celui des paires (position-impulsion). Comme la dynamique géodésique est à vitesse constante, on peut se restreindre au cas de la vitesse 1. On obtient ainsi un espace de phases  $P$  de dimension 3 dont un point  $Z = (z, v)$  est la donnée d'un point  $z$  de la surface  $X$  et d'un vecteur unitaire  $v$  en ce point. Cet espace de phase  $P$  est muni d'une mesure de probabilité invariante par le flot géodésique  $d\mu(z)$ , la mesure *micro-canonique* de Liouville. La dynamique (flot géodésique)  $\varphi_t(z, v) = (z', v')$  est donnée ainsi : on parcourt la géodésique de vecteur vitesse initiale  $v$  pendant le temps  $t$ , on obtient le point  $z'$  et le vecteur vitesse à cet instant est  $v'$ .

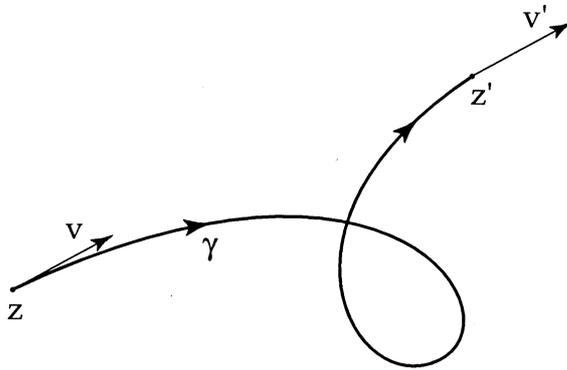


Figure II-5. – Le flot géodésique

Il est aisé de mettre en évidence les propriétés statistiques de ce flot : l'argument de Hopf montre l'ergodicité (chaos faible) ; des arguments d'analyse harmonique (généralisation des séries de Fourier) montrent les propriétés de mélange et de décroissance des corrélations ; le *closing-lemma* et le théorème du retour de Poincaré montrent la densité des géodésiques périodiques.

### 2.2. ERGODICITÉ

Il s'agit de la propriété statistique la plus simple : le temps moyen passé par une géodésique typique dans un domaine de la surface (et même de l'espace des phases) est proportionnel à l'aire de ce domaine  $D$  :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_D(\varphi_t(x)) dt = \mu(D) .$$

on ne peut pas définir dans quel état se trouve le système, et où l'on ne parle que de probabilité de présence dans un état accessible.

### 3.3. CROISSANCE DE L'IMPRÉVISIBILITÉ

Pour le théoricien de la turbulence, *l'imprévisibilité* ne vient donc pas à proprement parler des équations (qui sont déterministes au sens de Laplace précisé ci-dessus), mais des incertitudes concernant l'état initial du système, dont on maîtrise très mal les fluctuations à petite échelle. On peut montrer que, comme dans les systèmes dynamiques chaotiques, un écart initial faible entre deux solutions va s'amplifier de façon importante au cours du temps, grâce aux effets non-linéaires. Dans une prévision numérique par exemple, l'erreur initiale va donc croître substantiellement, en sorte que toute prévision déterministe du système devient impossible au bout d'un certain temps. C'est la petite perturbation imprévue<sup>6</sup> qui s'amplifie considérablement pour rendre la prévision météorologique hasardeuse ou impossible, comme l'a si bien écrit Henri Poincaré (1908) à propos de la prévision des cyclones en particulier.

## 4. SIMULATIONS NUMÉRIQUES DIRECTES

Pour résoudre numériquement les équations du mouvement, on définit dans le domaine de calcul dans l'espace-temps une grille de pas  $(\Delta x, \Delta t)$ . Ces pas peuvent être variables et la grille dans l'espace non orthogonale. L'opérateur de dérivée partielle en temps est calculé grâce à des développements en série de Taylor en puissances du pas de temps  $\Delta t$ . Les opérateurs de dérivée partielle en espace sont calculés soit par les méthodes spectrales évoquées plus haut si la géométrie s'y prête, soit par des développements en série de Taylor en puissances de  $\Delta x$  (méthodes aux différences finies). Les calculs seront d'autant plus précis que l'ordre des développements est plus élevé. L'ordre trois est excellent pour les dérivées temporelles : on peut ainsi gagner du temps et de la précision par rapport aux schémas d'ordre un, en prenant des pas de temps plus importants. Pour les dérivées spatiales, on a intérêt à prendre l'ordre le plus élevé possible en ce qui concerne les termes non-linéaires des équations (six est à cet égard bien meilleur que deux). Dans ces simulations, on avance dans le temps de la façon suivante : la connaissance des variables aux instants  $t$  et  $t - \Delta t$  permet de calculer ces variables à l'instant  $t + \Delta t$ , et ainsi de suite.

Que signifient donc ces simulations numériques, au vu des considérations sur la croissance de l'imprévisibilité développées plus haut ? En fait, on peut montrer qu'il existe dans tous ces écoulements turbulents une échelle dite visqueuse  $l_\nu$ , telle que les mouvements de longueur d'onde inférieure à cette échelle sont immédiatement dissipés par la viscosité, et ne peuvent se développer. Du point de vue de l'imprévisibilité, les

---

<sup>6</sup> Lucrèce parle du *clinamen* dans "*De natura rerum*", voir Serres (1977).

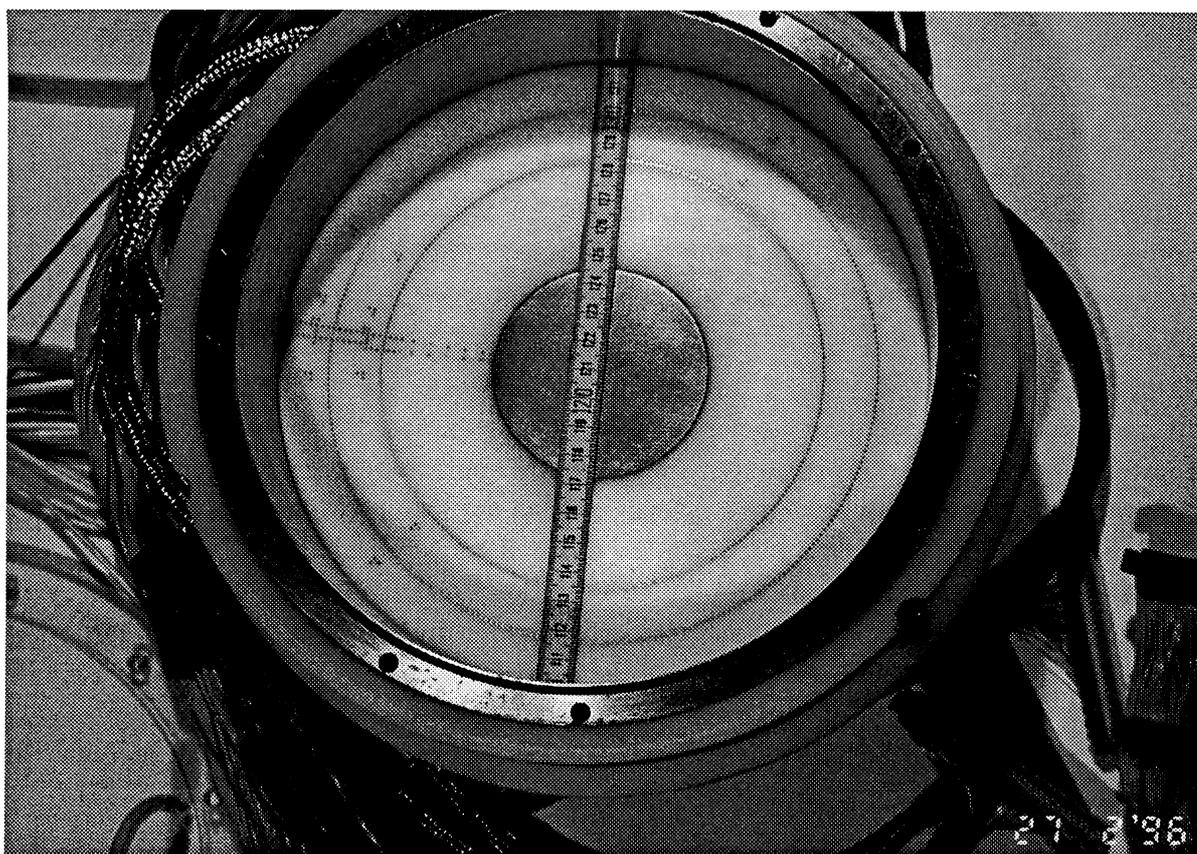
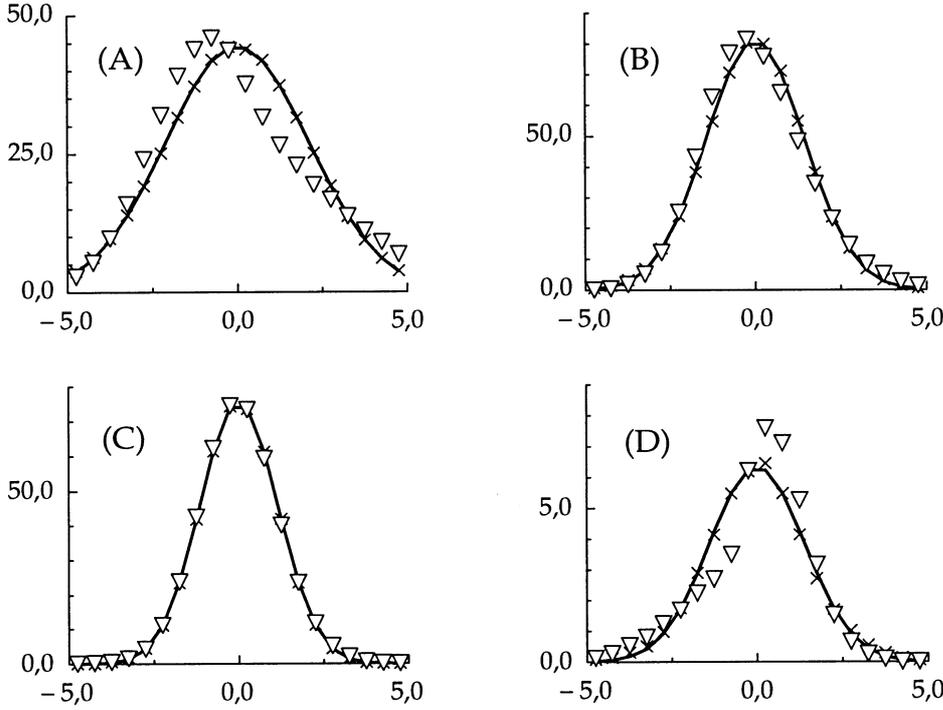


Figure IV-4. – La cellule permettant l'observation d'une couche de mélange circulaire turbulente (quasi-2D), avant introduction du mercure (remarquer la dorure des parois métalliques), et hors du solénoïde (voir planches couleur)

que tous les autres temps caractéristiques, la diffusion électromagnétique transporte efficacement le moment cinétique dans toute l'épaisseur de la couche fluide annulaire qui tourne ainsi à une vitesse connue et proportionnelle au courant  $I$ . Au contraire, la partie centrale de la cuve demeure au repos. Une couche de mélange circulaire se développe donc à l'interface entre ces deux domaines au-dessus de la ligne d'électrodes. Elle devient très vite le siège d'instabilités qui prennent la forme d'une couronne de tourbillons de même signe distants d'une longueur assez petite (quelques  $cm$ ) conforme à la longueur d'onde la plus instable prédite par la théorie linéaire de stabilité. Si l'on applique brusquement le courant électrique à partir d'un instant initial, on observe d'abord une période d'accélération de l'anneau liquide, au cours de laquelle la vitesse est pratiquement uniforme sur la largeur de cet anneau. L'instabilité se développe dès que le courant électrique imposé dépasse une valeur critique de l'ordre de  $0,2 A$ . Mais, puisque l'on s'intéresse plutôt aux régimes turbulents, on utilise en général des courants électriques beaucoup plus grands, entre  $1$  et  $30 A$ . La durée typique à partir de laquelle la perturbation est bien marquée et commence à redistribuer le moment cinétique est de l'ordre de quelques secondes à quelques dizaines de secondes suivant la valeur du courant électrique. Et l'on observe ensuite les interactions entre ces structures tourbillonnaires, qui deviennent de plus en plus grandes et de moins en moins nombreuses. Elles prélèvent



**Figure V-4.** – Fonctions de distribution  $\phi(v_x)$  (croix) et  $\phi(v_y)$  (triangles) des vitesses horizontales et verticales mesurées aux altitudes  $y/\sigma = 1$  (A), 11 (B), 23 (C), 39 (D). Les vitesses sont calculées dans des unités où  $L = 1$  et  $g = 10$ . Les courbes en trait plein représentent la meilleure approximation gaussienne de  $\phi(v_x)$  (figure tirée de la référence Helal, Biben et Hansen, 1997)

Cette densité de probabilité est solution de l'équation de Smoluchovski, bien connue dans la théorie du mouvement brownien (voir p. ex. Wax, 1954) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0; t) = \nabla \cdot \left\{ D(\mathbf{r}) \nabla \rho(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0; t) + \frac{g}{\xi(\mathbf{r})} \rho(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0; t) \right\} \quad (9)$$

où  $D(\mathbf{r})$  et  $\xi(\mathbf{r})$  sont les coefficients d'autodiffusion et de friction locaux, liés par la relation d'Einstein locale,

$$D(\mathbf{r}) = k_B T(\mathbf{r}) / m \xi(\mathbf{r}) \quad (10)$$

et l'équation (9) doit être résolue avec la condition initiale :

$$\rho(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0; t = 0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (11)$$

Il faut noter que l'équation (9) s'applique loin de la base vibrante. Les grains diffusent de façon anisotrope et il est instructif de mesurer (expérimentalement ou numériquement) les moments d'ordre deux de  $\rho$  :

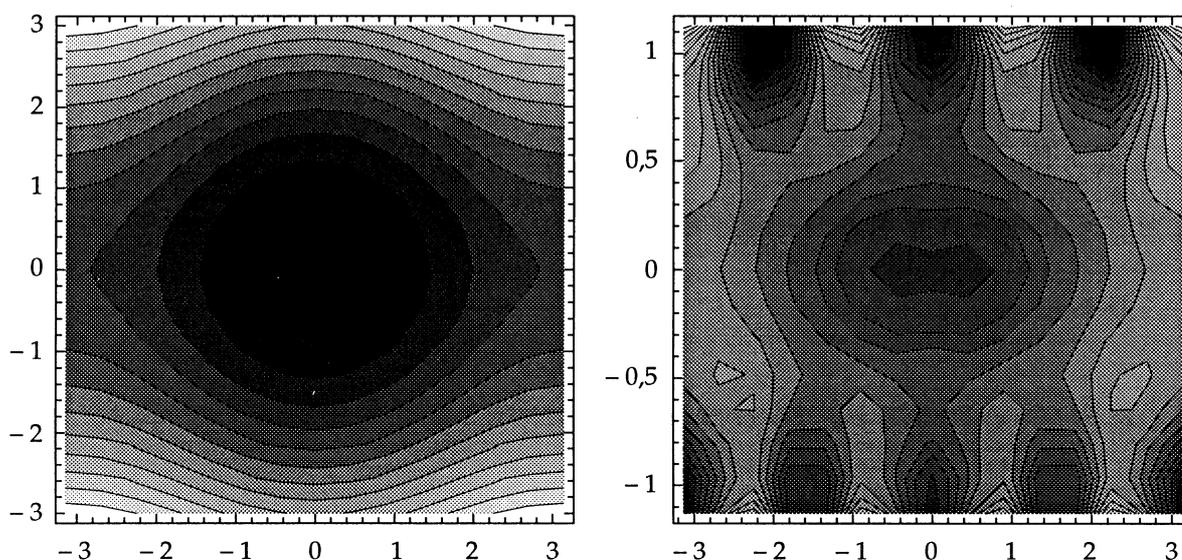
$$\Delta_x^2(x_0, y_0; t) = \langle (x(t) - x_0)^2 \rangle \quad (12a)$$

$$\Delta_y^2(x_0, y_0; t) = \langle (y(t) - y_0)^2 \rangle \quad (12b)$$

mouvement des particules de haute énergie, tant en direction qu'en norme. L'approche des années soixante-dix était fondée sur le caractère supposé aléatoire de la phase des modes. L'approche des années quatre-vingts lève cette hypothèse restrictive en développant le point de vue du chaos hamiltonien.

### 3.3. CHAOS HAMILTONIEN ET NATURE DE LA DISSIPATION

Une particule de haute énergie est en résonance avec un mode d'Alfven lorsque, dans le référentiel du centre-guide de son mouvement giro-synchrotron, sa pulsation de Larmor coïncide avec la pulsation du mode. La résonance exacte correspond à un point fixe du système hamiltonien décrivant son mouvement pour un jeu convenablement choisi de variables conjuguées. Au voisinage de ce point fixe, le mouvement de la particule présente une oscillation comme au fond d'un puits de potentiel. Cette oscillation non-linéaire se superpose au mouvement synchrotron. Loin de ce point fixe, d'une manière très similaire à ce qui se passe pour un pendule, la particule a une trajectoire circulante. Les deux types de trajectoires dans l'espace des phases – oscillations non-linéaires autour du point fixe et trajectoires circulantes – sont séparées par des trajectoires particulières qu'on appelle justement les “séparatrices” (voir figure VI-4).



**Figure VI-4.** – à gauche (Œil de résonance; à droite Multitude d'yeux de résonance

La résonance non-linéaire, qui est unique sur la figure de gauche, est bordée d'autres résonances sur la figure de droite. L'isolement des résonances et le cloisonnement de l'espace des phases disparaissent lorsque l'amplitude de la perturbation dépasse une certaine valeur critique

Considérons à présent un ensemble de modes de nombres d'onde différents. La particule peut résonner avec chacun de ces modes en des points différents de l'espace des phases, les zones de résonance étant enfermées par des séparatrices qui verrouillent l'espace des phases. Ces zones de résonances sont bien distinctes lorsque les modes ont des nombres d'onde bien distincts et des amplitudes faibles. Plus le spectre est riche en modes plus

42 ans d'une indigestion caractérisée à Berlin, où Frédéric II l'avait invité à poursuivre son œuvre philosophique... La perturbation porte alors les observables à des valeurs "insupportables", même par les attracteurs pathologiques. L'"édredon" des bassins pathologiques qui entourent en pétales le bassin physiologique est franchi, et la trajectoire "s'échappe" vers des valeurs incompatibles avec la vie, dans le bassin de l'attracteur léthal : celui-ci est situé en général "à l'infini" pour une des observables, celle qui correspond à la concentration d'un substrat ingéré par exemple, qui s'accumule dans l'organisme sans être métabolisé (figure VII-4).

Espace des observables

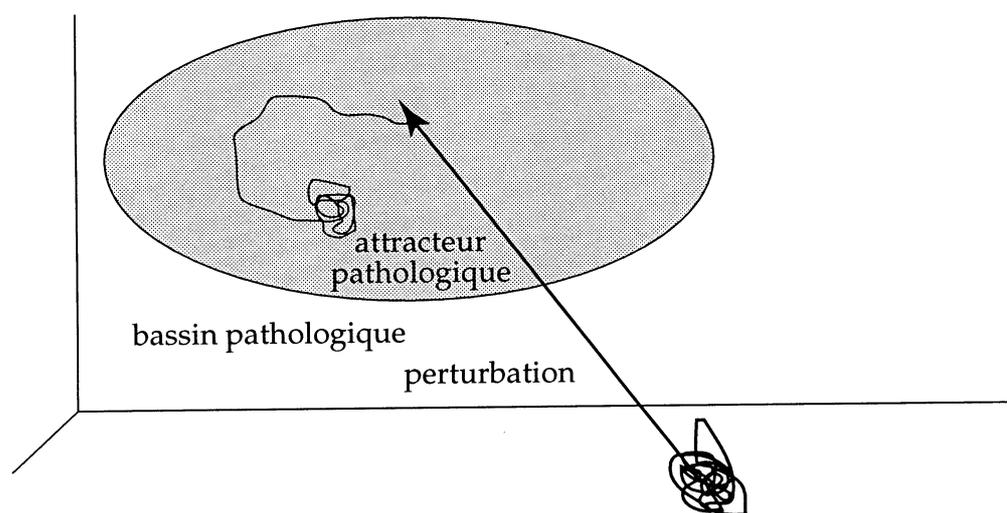


Figure VII-3. – Existence d'un attracteur pathologique

Les définitions qui suivent font abstraction du caractère discret ou continu du temps : elles sont définies quel que soit l'espace des temps  $T$  utilisé. Elles sont également indépendantes de l'espace d'état  $E$  dans lequel varient les variables du système étudié : ces variables sont en général des observables du système (concentrations de substances importantes du métabolisme interne, grandeurs métriques liées à la morphologie, caractéristiques statistiques des populations cellulaires neuronales, ..., de l'être vivant étudié). Les paramètres du système (température externe, concentrations des substrats nutritifs, puissance de l'énergie sonore ambiante, ...) prennent leurs valeurs dans un espace paramétrique, en général sous l'effet de contraintes de l'environnement avec lequel l'être vivant est en interaction.

Dans le cas aléatoire, l'analogie d'une trajectoire sera défini par un ensemble de trajectoires possibles, chacune étant réalisable avec une certaine probabilité. La notion de trajectoire est essentielle pour tout ce qui va suivre : elle n'est devenue d'usage courant que depuis l'utilisation de l'ordinateur qui la visualise dans une représentation 3D d'une partie des observables. Auparavant, le système n'était connu qu'à travers les évolutions temporelles de celles-ci. Par exemple (Demongeot *et al.*, 1988), la

La force de ce texte tient sans doute à ce que Laplace (1749-1827) utilise un vocabulaire qui le place dans une zone indécidable entre science physique et philosophie<sup>7</sup>. Plusieurs termes remarquables méritent à cet égard d'être relevés.

D'emblée la vision laplacienne du monde physique est placée sous le signe de la *causalité*. Dans l'alinéa précédent, Laplace a rappelé le principe de "raison suffisante" (ou "déterminante") de Leibniz, forme traditionnelle du principe de causalité. Laplace ne se contente pas de formuler un principe de légalité. Pour lui, l'idéal de la science n'est pas seulement de soumettre les phénomènes à des lois, il est aussi de "prévoir", comme il est dit à la fin du passage. La prévision s'appuie en l'occurrence sur deux sortes de connaissances : des lois générales, et des informations sur "l'état" de l'univers en un instant donné (ce que l'on appellera plus tard des "conditions initiales"). C'est au prix du couplage de ces deux genres de connaissances que la notion philosophique classique de "cause", si souvent critiquée, acquiert consistance scientifique pour Laplace.

Un deuxième élément important de la fiction est que la prévision est exacte. Laplace n'utilise pas le mot, mais la formule "rien n'est incertain", associée à l'indication d'un moyen mathématique -l'usage de fonctions analytiques-, ne laisse pas de doutes sur ce point. L'Intelligence dont parle Laplace n'a pas une connaissance qui serait seulement approchée. C'est à "l'esprit humain" qu'est réservé ce vocabulaire (voir la fin de la citation).

En troisième lieu, la prévision de l'Intelligence laplacienne s'applique à "l'univers", donc à la totalité des événements qui surviennent dans le monde physique. La formule est cosmologique. La prévision de l'Intelligence idéale embrasse l'ensemble du monde physique dans toute son étendue spatiale et temporelle. On fait ainsi un postulat sur la structure même du monde physique. C'est ce qui a fait dire à des générations de commentateurs que Laplace s'aventure dans le domaine de la métaphysique. Le physicien astronome postule que la structure du monde est telle qu'il est possible en droit de calculer l'état futur de l'univers à partir de son état en un instant donné, même si en pratique l'homme ne peut y parvenir (le texte reproduit ci-dessus introduit un livre sur les probabilités, seul recours pour l'homme lorsqu'il ne peut faire de précision exacte).

On a dit que l'Intelligence invoquée par Laplace était une intelligence divine. D'après Krzysztof Pomian, "c'est le Dieu d'une idéologie scientiste *in statu nascendi*" (Pomian, 1990 : 16). Autrement dit, un Dieu calculateur, un peu du genre de celui de Leibniz, remplacerait le Dieu des religions révélées. Les choses me semblent être plus subtiles. L'Intelligence convoquée par Laplace est certainement surhumaine, mais ce n'est pas pour autant une intelligence divine. C'est en fait une sorte de physicien idéalisé et

---

<sup>7</sup> Dès 1773, à 24 ans, Laplace avait déjà exprimé des vues semblables : "L'état présent de l'univers est évidemment une suite de ce qu'elle était au moment précédent et, si nous concevons une intelligence qui, pour un instant donné, embrasse tous les rapports des êtres de cet Univers, elle pourra déterminer pour un temps quelconque pris dans le passé ou dans l'avenir la position respective, les motions et généralement toutes les affections de ces êtres..." (cit. in Gillispie, 1996, p 75).