Introduction
aux variétés différentielles

nouvelle édition

Grenoble Sciences

Grenoble Sciences est un centre de conseil, expertise et labellisation de l'enseignement supérieur français. Il expertise les projets scientifiques des auteurs dans une démarche à plusieurs niveaux (référés anonymes, comité de lecture interactif) qui permet la labellisation des meilleurs projets après leur optimisation. Les ouvrages labellisés dans une collection de Grenoble Sciences ou portant la mention « Sélectionné par Grenoble Sciences » (« *Selected by Grenoble Sciences* ») correspondent à :

» des projets clairement définis sans contrainte de mode ou de programme,

» des qualités scientifiques et pédagogiques certifiées par le mode de sélection (les membres du comité de lecture interactif sont cités au début de l'ouvrage),

» une qualité de réalisation certifiée par le centre technique de Grenoble Sciences.

Directeur scientifique de Grenoble Sciences

Jean Bornarel, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1

On peut mieux connaître Grenoble Sciences en visitant le site web :

http://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr

On peut également contacter directement Grenoble Sciences :

Tél (33) 4 76 51 46 95, e-mail : *grenoble.sciences@ujf-grenoble.fr*

Livres et pap-ebooks

Grenoble Sciences labellise des livres papier (en langue française et en langue anglaise) mais également des ouvrages utilisant d'autres supports. Dans ce contexte, situons le concept de **pap-ebook** qui se compose de deux éléments :

» un **livre papier** qui demeure l'objet central avec toutes les qualités que l'on connaît au livre papier

» un site **web corrélé** ou site **web compagnon** qui propose :
  › des éléments permettant de combler les lacunes du lecteur qui ne possèderait pas les prérequis nécessaires à une utilisation optimale de l'ouvrage
  › des exercices de training
  › des compléments permettant d'approfondir, de trouver des liens sur internet, etc.

Le livre du **pap-ebook** est autosuffisant et certains lecteurs n'utiliseront pas le site web compagnon. D'autres pourront l'utiliser, et chacun à sa manière. Un livre qui fait partie d'un **pap-ebook** porte en première de couverture un logo caractéristique et le lecteur trouvera le site compagnon à l'adresse internet suivante :

http://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr/pap-ebook/nom de l'auteur du livre

Grenoble Sciences bénéficie du soutien du **Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche** et de la **Région Rhône-Alpes**

Grenoble Sciences est rattaché à **l'Université Joseph Fourier de Grenoble**

INTRODUCTION AUX VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES

nouvelle édition

Jacques LAFONTAINE

EDP SCIENCES

17, avenue du Hoggar
Parc d'Activité de Courtabœuf - BP 112
91944 Les Ulis Cedex A - France

Introduction aux variétés différentielles

Cet ouvrage est labellisé par Grenoble Sciences, est un des titres du secteur Mathématiques de la Collection Grenoble Sciences d'EDP Sciences, qui regroupe des projets originaux et de qualité. Cette collection est dirigée par **Jean Bornarel**, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Comité de lecture de l'ouvrage

› **Pierre Averbuch**, Directeur de recherche honoraire au CNRS, Grenoble
› **Pierre Berard**, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble I
› **Gaël Meigniez**, Professeur à l'Université de Bretagne Sud
› **Jean-Yves Merindol**, Professeur, Directeur de l'ENS Cachan

Cette nouvelle édition d'***Introduction aux variétés différentielles*** de Jacques Lafontaine a été suivie par Laura Capolo pour la partie scientifique et par Anne-Laure Passavant et Sylvie Bordage du centre technique Grenoble Sciences pour sa réalisation pratique.

L'illustration de couverture est l'œuvre d'Alice Giraud, d'après : Thomas Banchoff & Jeff Beall, Brown University : Bouteille de Klein ; Fropuff/ Inductiveload, Wikimedia commons : Immersion « 8 » de la bouteille de Klein ; éléments fournis par l'auteur.

Autres ouvrages labellisés sur des thèmes proches (chez le même éditeur)

Analyse numérique et équations différentielles (Jean-Pierre Demailly) • *Analyse statistique des données expérimentales* (Konstantin Protassov) • *Approximation Hilbertienne* (Marc Attéia et Jean Gaches) • *Description de la symétrie* (Jean Sivardière) • *Exercices corrigés d'analyse avec rappels de cours - Tome I* (Daniel Alibert) • *Exercices corrigés d'analyse avec rappels de cours - Tome II* (Daniel Alibert) • *Mathématiques pour l'étudiant scientifique - Tome I* (Philippe-Jacques Haug) • *Mathématiques pour l'étudiant scientifique - Tome II* (Philippe-Jacques Haug) • *Mathématiques Pour les Sciences de la Vie, de la Nature et de la Santé* (Jean Paul et Françoise Bertrandias) • *Méthodes numériques appliquées pour le scientifique et l'ingénieur* (Jean-Philippe Grivet)• *Nombres et algèbre* (Jean-Yves Mérindol)• *Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et ingénieurs* (E. Belorizky)

et d'autres titres sur le site internet :
http://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr

ISBN 978-2-7598-0572-3

© EDP Sciences, 2010

Comment utiliser cet ouvrage pap-ebook (livre + site web) ?

Introduction aux variétés différentielles est **avant tout un livre** avec tous ses atouts et le lecteur trouvera ci-après un descriptif succinct.

Mais il est aussi un **pap-ebook de Grenoble Sciences**, c'est-à-dire un livre enrichi par un site web qui lui est corrélé. Sur ce site web le lecteur trouvera :

- des éléments pour combler ses lacunes de prérequis,
- des exercices et des corrigés permettant de s'entrainer et quelques développements,
- des approfondissements et parfois des pistes bibliographiques pour ceux qui désirent aller plus loin.

Le site s'enrichit au cours du temps en fonction des suggestions. L'adresse de ce site compagnon est :

`http ://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr/pap-ebook/lafontaine`

Le livre (et son site) est réalisé à destination de lecteurs variés. Ils trouveront donc des préliminaires, des détails techniques, des compléments souvent omis dans les ouvrages ciblés sur un seul public.

Le premier chapitre et une bonne part des chapitres 5 et 6 forment un exposé relativement complet de **calcul différentiel classique**, du b.a.-ba à la formule de Stokes.

Le chapitre 2 a l'ambition de faire comprendre ce que sont les **variétés différentielles** et comment s'en servir à celles et ceux à qui cette notion fait peur, qu'ils la jugent trop abstraite ou trop technique.

Le chapitre 3 est plus technique, précisément parce qu'il expose des **techniques** trop souvent passées sous silence.

Les deux derniers chapitres peuvent être abordés directement dès que l'on maîtrise peu ou prou les notions de variété et de forme différentielle.

Notons aussi que quelqu'un qui, à partir du mot "holomorphe" dans l'index, ferait tous les exercices auquel ce mot fait référence, en tirerait une bonne sensibilisation au monde si différent des variétés complexes.

A l'occasion de cette deuxième édition, le pap-ebook est devenu complètement autosuffisant en ce qui concerne le calcul différentiel proprement dit. Mais il est vain de parler de variétés sans faire de topologie. Il est donc très brièvement question de simple connexité et de revêtements. Sur ces points, le site web devrait apporter les compléments nécessaires. Les lecteurs peuvent d'ailleurs adresser à Grenoble Sciences des suggestions pour enrichir le site web compagnon. Elles seront exploitées dans la mesure du possible.

Théorème 1.17. *Soit f une application C^1 d'un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$. On suppose que $0 \in U$ et que la différentielle df_0 est injective. Alors il existe un ouvert V de $\mathbf{R}^q$ contenant 0, un ouvert U' contenu dans U tel que $f(U') \subset V$, et un difféomorphisme φ de V sur son image tels que*

$$\varphi\big(f(x^1, \cdots, x^p)\big) = (x^1, \cdots, x^p, 0, \cdots, 0).$$

Démonstration. Nécessairement $p \leq q$. Soient $f^1, \cdots, f^q$ les composantes de f. L'hypothèse signifie que la matrice jacobienne de f est de rang p. Après permutation des coordonnées dans l'espace d'arrivée si nécessaire, on peut donc supposer que la matrice

$$A = \big(\partial_j f^i(0)\big)_{1 \leq i \leq p\,, 1 \leq j \leq p}$$

est inversible. On définit alors une application g de $U \times \mathbf{R}^{q-p}$ dans $\mathbf{R}^q$ en posant

$$g(x^1, \cdots, x^p, y^1, \cdots, y^{q-p}) = (f^1(x), \cdots, f^p(x), y^1 + f^{p+1}(x), \cdots, y^{q-p} + f^q(x)).$$

La matrice jacobienne de g est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & I \end{pmatrix}.$$

Elle est inversible, donc il existe un ouvert W contenant 0 tel que $g_{|W}$ soit un difféomorphisme sur son image. Le difféomorphisme cherché est $\varphi = g^{-1}$. □

Remarque. Une conséquence immédiate de ce théorème est l'existence d'une inverse à gauche locale pour f, c'est à dire d'une application d'un ouvert de $\mathbf{R}^q$ contenant 0 sur un ouvert de $\mathbf{R}^p$ telle que $f_1 \circ f = Id_{\mathbf{R}^p}$: il suffit de prendre $f_1 = (\varphi^1, \cdots, \varphi^q)$, autrement dit de ne garder que les q premières coordonnées de φ.

Exemple. Si $p = 1$ l'image de f est une courbe, et le théorème nous dit que tout morceau suffisamment petit de cette courbe peut être transformé en segment de droite par un difféomorphisme.

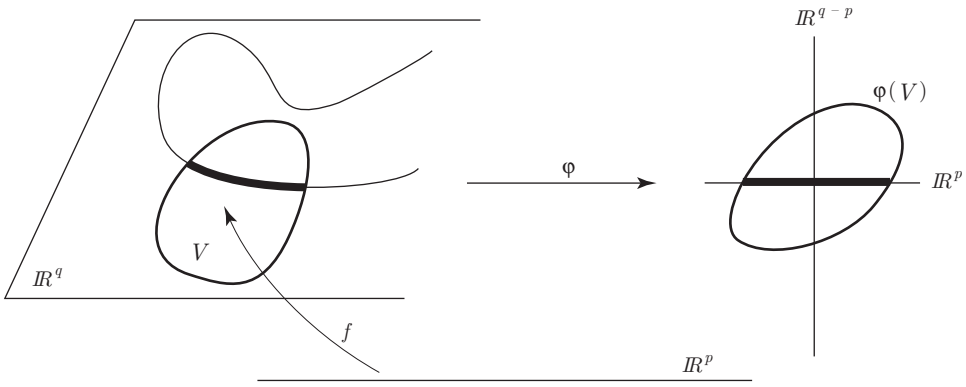

Figure 1.2 – Redressement d'une courbe

Comme souvent en Mathématiques, on érige en axiome une propriété vérifiée dans un cadre suffisamment naturel.

Définitions 2.4.

a) Deux cartes (U_1, φ_1) *et* (U_2, φ_2) *d'une variété topologique* M *sont* compatibles d'ordre k *(*$1 \leq k \leq \infty$*) si* $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ *ou si l'application*

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

(dite fonction de transition*) est un difféomorphisme* C^k.

b) Un atlas de classe C^k *d'une variété topologique* M *est un atlas* $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ *de* M *dont deux cartes quelconques sont toujours compatibles d'ordre* k.

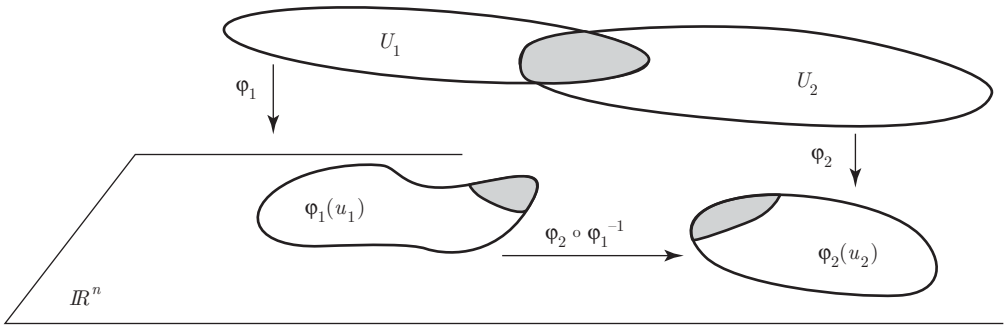

Figure 2.1 – Fonction de transition

Prenons par exemple une sous-variété lisse de codimension 1 de $\mathbf{R}^n$, définie par une submersion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Elle admet un atlas lisse de cardinal au plus n (dont les domaines sont les ouverts U_i de M où la i-ième dérivée partielle de f ne s'annule pas). Mais toute paramétrisation lisse aura pour inverse une carte compatible avec cet atlas. Cela conduit aux définitions suivantes.

Définitions 2.5.

a) Un atlas de classe C^k *d'une variété topologique* M *est dit* maximal *si toute carte compatible avec les cartes de l'atlas appartient elle-même à l'atlas (on trouvera aussi dans la littérature les adjectifs "complet" et "saturé"). Un tel atlas est aussi appelé* structure différentielle de classe C^k.

b) Une variété différentielle *de classe* C^k *est une variété topologique munie d'une structure différentielle de classe* C^k.

Tout atlas est évidemment contenu dans un unique atlas maximal, obtenu en ajoutant toutes les cartes compatibles avec les siennes. Par exemple, d'après la proposition 2.3 une sous-variété lisse de $\mathbf{R}^n$ a une structure lisse naturelle. Elle est obtenue en prenant l'atlas formé par les inverses de *toutes (!)* les paramétrisations.

En pratique, on définit une structure différentielle en partant d'un atlas "pas trop gros" : ce sera celle donnée par l'atlas maximal correspondant. On procède déjà ainsi pour les sous-variétés de $\mathbf{R}^n$.

2.10. Exercices

1. *Un espace non séparé localement homéomorphe à* $\mathbf{R}$

Soit X la droite réelle avec l'origine dédoublée. Autrement dit, $X = \mathbf{R} \coprod \{\alpha\}$, les ouverts de X étant des réunions d'ouverts de $\mathbf{R}$ et d'ensembles de la forme $U \setminus \{0\} \cup \{\alpha\}$, où U est ouvert dans $\mathbf{R}$. Montrer que tout point de X est contenu dans un ouvert difféomorphe à $\mathbf{R}$, mais que X n'est pas séparé.

2. On munit $\mathbf{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. A tout point a, on associe la fonction f_a, définie sur la variété M des droites par la formule

$$f_a(d) = (\mathrm{dist}(a, d))^2.$$

Montrer que la fonction f_a est lisse.

3. Montrer que l'ensemble des points $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ tels que

$$x^2 + y^2 = z^2 + t^2 = \frac{1}{2}$$

est une sous-variété de S^3, difféomorphe à $S^1 \times S^1$. Donner de même des exemples de sous-variétés de S^{2n-1} difféomorphes à $(S^1)^n$.

4. *Groupes unitaire et spécial unitaire*

a) Montrer, en utilisant une submersion convenable, que l'ensemble $U(n)$ des matrices unitaires (matrices à coefficients complexes d'ordre n telles que ${}^t\overline{A}A = I$) est une sous-variété de $\mathbf{R}^{2n^2}$ de dimension n^2. Utiliser l'application exponentielle pour obtenir des paramétrisations de $U(n)$.

b) Montrer de même que l'ensemble $SU(n)$ des matrices *spéciales unitaires* (défini par les conditions $A \in U(n)$ et $\det A = 1$) est une sous-variété de dimension $n^2 - 1$.

c) Montrer que $SU(2)$ est difféomorphe à S^3.

5. Montrer que toute application linéaire inversible $A \in Gl(n+1, \mathbf{R})$ définit par passage au quotient $P^n\mathbf{R}$ un difféomorphisme, et que le groupe des difféomorphismes ainsi obtenu est isomorphe à $Gl(n+1, \mathbf{R})/\mathbf{R}^*I$.

* Ecrire explicitement l'action de $Sl(2, \mathbf{R})$ sur S^1 ainsi obtenue.

N.B. Ce groupe est noté $PGl(n+1, \mathbf{R})$, et appelé bien sûr le groupe projectif. Tout se passe de même si on remplace $\mathbf{R}$ par $\mathbf{C}$.

6. *Quadriques projectives*

a) Soit q une forme quadratique de rang maximum sur $\mathbf{R}^4$, et soit p la projection canonique de $\mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$ sur $P^3\mathbf{R}$. Montrer que $p(q^{-1}(0))$ est une sous-variété de $P^3\mathbf{R}$ (éventuellement vide).

b) Montrer que si q est de type $(1, 3)$ ou $(3, 1)$ cette sous-variété est difféomorphe à S^2.

Corollaire 3.8 (théorème de Whitney "facile"). *Toute variété compacte lisse de dimension n se plonge dans $\mathbf{R}^{2n+1}$.*

Démonstration. On part du plongement f de X dans un $\mathbf{R}^m$. On va voir qu'en composant f avec une projection bien choisie, on obtient un plongement dans $\mathbf{R}^{m-1}$. Pour ce faire, on munit $\mathbf{R}^m$ d'un produit scalaire euclidien, et on introduit, pour tout vecteur unitaire $v \in S^{m-1}$, la projection p_v sur l'orthogonal de v dans $\mathbf{R}^m$.

Posons $Y = f(X)$. Pour que la restriction de p_v à Y soit injective, il faut et suffit que, quels que soient x et y distincts dans Y, le vecteur

$$\frac{\overrightarrow{xy}}{\|\overrightarrow{xy}\|}$$

soit différent de v, ou encore que v n'appartienne pas à l'image de l'application

$$(x, y) \mapsto \frac{\overrightarrow{xy}}{\|\overrightarrow{xy}\|} \qquad \text{de } Y \times Y \setminus \Delta \text{ dans } S^{m-1},$$

où l'on a désigné par Δ la diagonale de Y. D'après le théorème de Sard (théorème 2.49), il existe de tels v dès que $2n < m - 1$.

Pour que $p_{v|Y}$ soit une immersion, il faut et suffit – voir la figure 3.2 – que v n'appartienne à aucun sous-espace tangent à Y (remarquons que c'est la version infinitésimale de la condition précédente). Introduisons

$$Z = \{(x, v) \in X \times S^{N-1},\ v \in T_{f(x)}Y\}.$$

On vérifie que Z est une sous-variété de dimension $2n-1$ de $X \times S^{N-1}$ (voir l'exercice 15 du chapitre 1. En particulier $pr_2(Z)$ est de mesure nulle dès que $2n < m$.

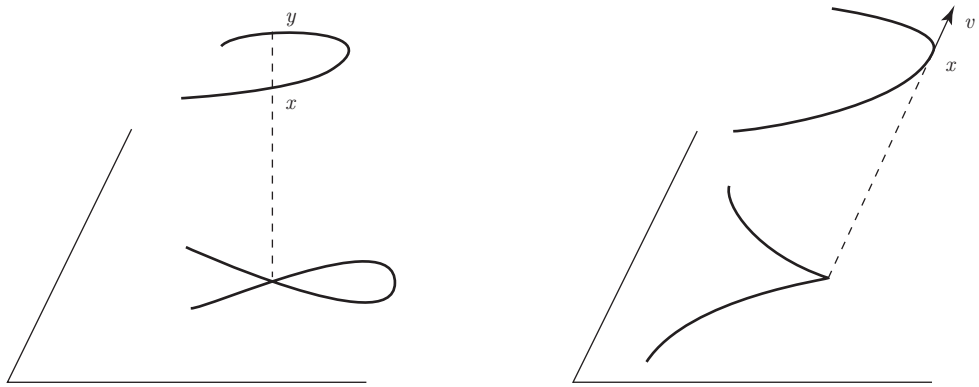

Figure 3.2 – Une projection peut faire apparaître des singularités

En itérant ce procédé, on voit que X admet une immersion dans $\mathbf{R}^{2n}$ et un plongement dans $\mathbf{R}^{2n+1}$. □

Reste à déterminer la structure des sous-groupes discrets d'un espace vectoriel réel.

Théorème 4.40. *Les sous-groupes discrets d'un espace vectoriel réel de dimension finie sont les sous-groupes engendrés* en tant que groupes additifs *par k vecteurs indépendants.*

Démonstration. Montrons d'abord que si $v_1, \ldots, v_k$ sont k vecteurs indépendants, l'ensemble Γ des combinaisons linéaires à coefficients entiers des v_i est discret dans l'espace vectoriel E. Il suffit de vérifier que pour tout compact K de E, $K \cap \Gamma$ est fini. On complète les v_i en une base de E. Soit N la norme sup associée à cette base. Comme toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes, Il existe un $C > 0$ tel que $K \subset B_N(0, C)$. Alors, si $\gamma = \sum_{i=1}^k p_i v_i$ est dans Γ, on a $|p_i| \leq C$ pour tout i, et donc $\mathrm{card}(\Gamma \cap K) \leq (2C+1)^n$, si n est la dimension de E.

La réciproque se montre par récurrence sur n. Soit Γ un sous-groupe discret. Tout voisinage compact de 0 ne contient qu'un nombre fini d'éléments de Γ. Si $n = 1$ et $\Gamma \neq \{0\}$, il existe alors un $v \in \Gamma$ non nul et de valeur absolue minimale, qu'on peut supposer positif. Pour $x \in \Gamma$, on écrit

$$x = nv + r \qquad \text{avec} \quad n \in \mathbf{Z}\,, 0 \leq r < v.$$

Alors $r = x - nv \in \Gamma$, ce qui n'est possible que si $r = 0$.

Supposons maintenant le résultat vrai pour n, et montrons qu'il est vrai pour $n+1$. Comme Γ est discret, il contient, s'il n'est pas réduit à $\{0\}$, un élément non nul v_0 de norme minimale. Alors la distance de $\Gamma \setminus \mathbf{Z}v_0$ à la droite $\mathbf{R}v_0$ est strictement positive. Sinon il existerait une suite (w_k) de points de $\Gamma \setminus \mathbf{Z}v_0$ et une suite λ_k de réels telles que

$$\lim_{k\to\infty} \|w_k - \lambda_k v_0\| = 0.$$

On écrit $\lambda_k = [\lambda_k] + \mu_k$, avec $[\lambda_k] \in \mathbf{Z}$ et $|\mu_k| < 1/2$, et on en tire que

$$\lim_{k\to\infty} \|(w_k - [\lambda_k]v_0) - \mu_k v_0\| = 0.$$

Alors pour k assez grand l'élément $w_k - [\lambda_k]v_0)$ de $\Gamma \setminus \mathbf{Z}v_0$ a une norme strictement inférieure à celle de v_0, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si p désigne l'application de passage au quotient de E dans $E/\mathbf{R}v_0$, le sous-groupe $p(\Gamma)$ de $E/\mathbf{R}v_0$ est alors discret. D'après l'hypothèse de récurrence il existe des vecteurs $f_1, \ldots, f_k$ de $E/\mathbf{R}v_0$ tels que

$$p(\Gamma) = \bigoplus_{i=1}^k \mathbf{Z}f_i.$$

Soient $v_1, \ldots, v_k \in \Gamma$ tels que $p(v_i) = f_i$. Alors, si $x \in \Gamma$, on a

$$p(x) = \sum_{i=1}^k n_i f_i\,, \qquad \text{avec} \quad n_i \in \mathbf{Z}$$

et par suite

$$x - \sum_{i=1}^k n_i v_i \in \mathbf{R}e \cap \Gamma = \mathbf{Z}v_0. \qquad \square$$

Le produit scalaire définit un isomorphisme entre E et E^*, noté $v \mapsto v^\flat$ (parce qu'il fait descendre les indices des coordonnées, voir la section 5.2). L'isomorphisme inverse se note $\alpha \mapsto \alpha^\sharp$. Ces isomorphismes sont définis par les relations

$$\forall w \in E, v^\flat(w) = \langle v, w\rangle \quad \text{et} \quad \langle \alpha^\sharp, w\rangle = \alpha(w).$$

On en déduit un isomorphisme entre l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur un ouvert de E et celui des formes différentielles de degré 1, qui se note de la même façon. Ainsi dans un espace euclidien la circulation d'un champ de vecteurs et l'intégrale d'une forme différentielle de degré 1 le long d'une courbe sont deux notions équivalentes. Mais seule cette dernière peut être définie dans le cas où E est simplement un espace vectoriel. Elle sera la seule à s'étendre directement aux variétés, ** alors que la circulation d'un champ de vecteurs se définit à l'aide de la donnée supplémentaire d'une métrique riemannienne. **

Profitons de l'occasion pour définir le *gradient* d'une fonction f sur un espace euclidien. C'est le champ de vecteurs, noté ∇f, défini par $\nabla f = df^\sharp$.

Une question classique, notamment en physique, est de savoir si un champ de vecteurs est un champ de gradient (ou dérive d'un potentiel, dans le langage des physiciens). Cette question est en fait la version pour les champs de vecteurs d'une question plus naturelle et générale sur les formes différentielles : une forme différentielle $\alpha \in \Omega^1(U)$ étant donnée, à quelle condition existe-t-il une fonction $f \in C^\infty(U)$ telle que $\alpha = df$? En vertu du théorème de Schwarz sur l'interversion des dérivées, une condition nécessaire est

$$\partial_i \alpha_j(x) = \partial_j \alpha_i(x) \quad \text{quels que soient } x \in U \text{ et } i, j \in [1, n].$$

Mais cette condition n'est nullement suffisante.

Théorème 5.14. *Sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, il n'existe pas de fonction f de classe C^1 telle que la forme différentielle*

$$\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

soit égale à df.

C'est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 5.15. *Pour toute courbe paramétrée $c : [a, b] \to U$ telle que $c(a) = c(b)$ et toute fonction $f \in C^1([a, b], U)$ on a*

$$\int_c df = 0.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$\int_c df = \int_a^b \sum_{i=1}^n \partial_i f\big(c(t)\big) c'^i(t) dt = f\big(c(b)\big) - f\big(c(a)\big). \qquad \square$$

Démonstration du théorème. Il suffit d'intégrer α le long du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, paramétré par $c(t) = (\cos t, \sin t)$, où $t \in [0, 2\pi]$. On trouve que $\int_c \alpha = 2\pi$. $\square$

Chapitre 6

Intégration et applications

6.1. Introduction

Si f est une fonction d'une variable réelle à dérivée continue,

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Curieusement, ce résultat ne porte pas de nom dans les livres français. Les anglo-saxons l'appellent avec raison "fundamental theorem of calculus", et les russes ont eu la bonne idée de rendre hommage aux deux pères du calcul différentiel et intégral en l'appelant "formule de Leibniz–Newton". La formule de Stokes, qui est le résultat pivot de ce chapitre, est une généralisation de cette formule aux dimensions supérieures. Elle donne un bon exemple de situation où l'élaboration d'un bon énoncé est plus difficile que la démonstration elle-même.

Le point de départ de la formule de Leibniz–Newton est la convention

$$\int_a^b g(t)dt = -\int_b^a g(t)dt \quad \text{si } a \geq b.$$

Cela revient à intégrer non sur un intervalle, mais sur un intervalle orienté, c'est-à-dire un intervalle où l'on a choisi une origine et une extrémité. Si $I = [\alpha, \beta]$, il y a deux orientations possibles, suivant que l'on prenne α ou β comme origine.

C'est cette démarche – passage de l'intégrale vue comme mesure à l'intégrale sur un objet "orienté" – qu'il s'agit de généraliser. Hélas, nous sommes partis d'une situation trompeuse. Sur $\mathbf{R}$ il y a une orientation naturelle, donnée par l'ordre. Ce n'est plus le cas des courbes dans $\mathbf{R}^2$, même si ce sont des droites. Ce n'est plus le cas des espaces vectoriels (nous ne nous référons ici qu'à la notion "naïve" d'orientation, les précisions seront données dans la section 6.2). Il y a un passage (apparemment obligé) par des références à la vie quotidienne, telles que "le sens inverse des aiguilles d'une montre"

pour orienter les cercles, ou la "règle des trois doigts" (de la main droite!) qui donne les repères dits directs de l'espace à trois dimensions. Cette question est discutée de façon très détaillée dans [Sivardière]), ainsi que dans le dernier chapitre de la partie "Mécanique" de [Feynmann]. Tout ce que l'on peut faire est comparer des orientations. Cela est illustré par l'existence de variétés pour lesquelles un choix cohérent d'orientation est impossible. Cette impossibilité peut se voir "expérimentalement". En effet, en anticipant un peu sur ce qui sera exposé plus formellement dans la section 6.2, sur toute surface orientée de l'espace usuel, supposé orienté, on peut définir un champ de vecteurs normal de la façon suivante : si p est un point de la surface et R_p un repère orthonormé direct du plan tangent en p, n_p est l'unique vecteur unitaire normal en p à la surface tel que le repère (R_p, n_p) soit direct dans $\mathbf{R}^3$. Cela est impossible pour le ruban de Möbius, comme l'illustre la figure 6.1.

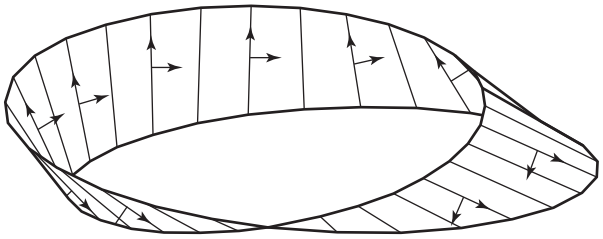

Figure 6.1 – Ruban de Möbius

Nous commençons par la discussion de ces problèmes d'orientation, avant de passer à la théorie de l'intégration proprement dite.

Un rôle important y est joué par les *domaines réguliers* d'une variété. Ce sont grosso modo les parties compactes dont la frontière est une sous-variété de codimension 1 (éventuellement non connexe, comme dans le cas d'un intervalle compact de $\mathbf{R}$). La formule de Leibniz–Newton se généralise en remplaçant $[a, b]$ par un domaine régulier D de dimension n, $\{a, b\}$ par son bord ∂D, et f par une forme différentielle α de degré $n-1$. On a

$$\int_D d\alpha = \int_{\partial D} \alpha,$$

le gros du travail consistant à définir ces deux termes. Cette généralisation englobe la formule de Green–Riemann, la formule d'Ostrogradski, et bien entendu la formule de Stokes traditionnelle, celle qui concerne les surfaces à bord de l'espace de dimension 3 où, semble-t-il, nous vivons.

L'intégration sur les variétés et la formule de Stokes ne servent pas seulement à voir de façon plus conceptuelle les formules que nous venons de citer. Pour illustrer ce fait, nous terminons ce chapitre par deux applications topologiques : le "théorème de la boule chevelue" (la sphère S^2 n'est pas peignable sans épi, autrement dit tout champ de vecteurs sur S^2 s'annule quelque part), et le théorème de Brouwer (toute application continue d'une boule fermée dans elle-même a un point fixe), qui se démontre ainsi sans utiliser de topologie algébrique.

A contrario, si deux courbes sont enlacées, nos figures suggèrent que toute surface qui a pour bord l'une d'elles rencontre l'autre. Cela peut être précisé ainsi.

Théorème 7.36. *Soient C et C' deux courbes fermées de $\mathbf{R}^3$, et soit Σ une surface de bord orienté C. On suppose que $\Sigma \cap C'$ est fini, et que pour tout x de l'intersection*

$$T_x\Sigma \cap T_xC' = \{0\}.$$

Alors

$$E(C, C') = \sum_{x \in \Sigma \cap C'} \mathrm{or}_x(\Sigma \cap C'),$$

où l'on a posé $\mathrm{or}_x(\Sigma \cap C') = +1$ si la réunion d'une base positive de $T_x\Sigma$ et d'une base positive de T_xC' est une base positive de $\mathbf{R}^3$, $\mathrm{or}_x(\Sigma \cap C') = -1$ sinon.

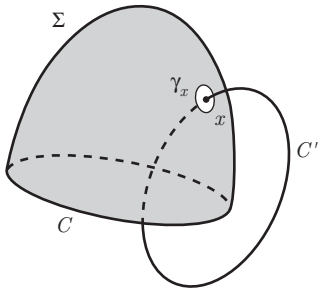

Figure 7.5 – Si $C = \partial\Sigma$ et C' sont enlacées, Σ rencontre C'

Preuve (esquissée). On procède exactement comme dans la preuve du théorème précédent, en enlevant à Σ, pour chaque $x \in \Sigma \cap C'$, un petit disque D_x de bord γ_x. Alors, en utilisant les mêmes notations, le théorème de Stokes et le fait que $d\omega = 0$, il vient

$$0 = \int_{(\Sigma \setminus \cup_{x \in \Sigma \cap C'} D_x) \times C'} d\delta^*\omega = \int_{C \times C'} \delta^*\omega - \sum_{x \in \Sigma \cap C'} \int_{\gamma_x \times C'} \delta^*\omega.$$

Donc

$$E(C, C') = \sum_{x \in \Sigma \cap C'} E(\gamma_x, C').$$

Pour déterminer $E(\gamma_x, C')$ on procède exactement comme dans l'exemple (7.2) : par homotopie, on peut se ramener au cas où γ_x est un cercle, disons horizontal, et où C' rencontre le plan du cercle orthogonalement en x. Alors, avec les notations de la définition 7.33, $F^{-1}(0, 0, 1)$ n'a qu'un élément si le rayon est assez petit, et on vérifie que le signe qu'on doit lui associer est bien $\mathrm{or}_x(\Sigma \cap C')$. □

Signalons pour terminer que l'enlacement intervient en magnétostatique. Si C est un circuit électrique parcouru par un courant uniforme d'intensité I, la circulation le long de C' du champ magnétique créé par le circuit est égale, à une constante multiplicative près déterminée par les unités physiques, à

$$I \int_{C \times C'} \delta^*\omega = IE(C', C)$$

(voir l'exercice 8), comme C.-F. Gauss le savait déjà.

8.5.2. Avec les pavages : idée de la preuve

Une méthode plus directe consiste à associer à tout pavage d'une surface un champ de vecteurs ayant un zéro d'indice 1 en chaque sommet, un zéro d'indice 1 à l'intérieur de chaque face et un zéro d'indice -1 à l'intérieur de chaque arête.

On part d'un triangle du plan. On trace les médianes et on oriente les douze segments ainsi obtenus de façon que chaque sommet soit toujours une origine, et le centre de gravité une extrémité (ce procédé est connu sous le nom de *subdivision barycentrique* par les topologues).

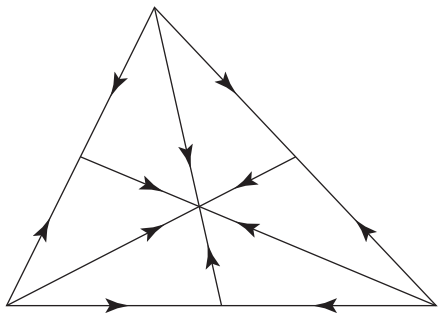

Figure 8.4 – Subdivision barycentrique

Cette construction, transportée aux simplexes d'une triangulation, suggère l'existence d'un champ de vecteurs ayant les zéros suivants :

1. les sommets de la triangulation, d'indice $+1$ (sources) ;
2. un zéro exactement à l'intérieur de chaque simplexe de dimension 2, d'indice 1 (puits) ;
3. un zéro exactement à l'intérieur de chaque simplexe de dimension 1, d'indice -1 (points selle).

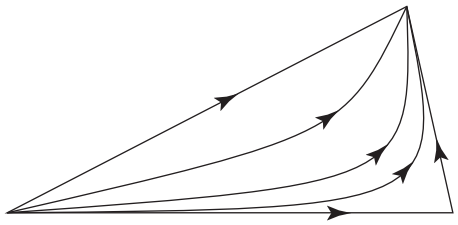

Figure 8.5 – Zoom sur un triangle de la subdivision

La somme des indices d'un tel champ vaut $f + s - a$. En utilisant tout ce qui précède ainsi que le théorème 8.13, on voit que

1. la quantité $\frac{1}{2\pi}\int_S \Omega_g$ ne dépend pas de la métrique riemannienne sur S ;
2. la quantité $\sum_{x\in Z(X)} \mathrm{ind}_x X$ ne dépend pas du champ de vecteurs X (supposé n'avoir qu'un nombre fini de zéros ;
3. Que la quantité $f + s - a$ ne dépend pas de la triangulation.

De plus, ces trois quantités sont égales, et égales à $\chi(S)$ d'après le théorème 8.5.

5. On peut soit utiliser directement la fibration de Hopf *réelle*, soit conjuguer par la projection stéréographique i_N l'homographie $t \mapsto \frac{at+b}{ct+d}$. On trouve l'application de S^1 dans S^1 définie par

$$(x,y) \mapsto \left(\frac{2(ac+bd)+2(ac-bd)x+2(ad+bc)y}{a^2+b^2+c^2+d^2+(a^2-b^2+c^2-d^2)x+2(ab+cd)y} \atop \frac{a^2+b^2-c^2-d^2+(a^2-b^2-c^2+d^2)x+2(ab-cd)y}{a^2+b^2+c^2+d^2+(a^2-b^2+c^2-d^2)x+2(ab+cd)y} \right)$$

Il est bien clair qu'il est préférable dans ce cas (et plus naturel !) de considérer S^1 comme la droite projective.

6. *Quadriques projectives*

b) Pour une base convenable de $\mathbf{R}^4$, la quadrique Q est l'ensemble des points dont les coordonnées homogènes vérifient

$$x^2+y^2+z^2-t^2=0.$$

La dernière coordonnée homogène est d'un point de Q est donc non nulle, et l'on conclu en envoyant Q dans $\mathbf{R}^3$ avec la carte

$$[x,y,z,t] \mapsto (\frac{x}{t},\frac{y}{t},\frac{z}{t}).$$

c) L'équation de Q en coordonnées homogènes peut se mettre sous la forme

$$x^2+y^2-z^2-t^2=0, \text{ mais aussi } XY-ZT=0.$$

Notant que $\frac{X}{Z}=\frac{T}{Y}$ et $\frac{X}{T}=\frac{Z}{Y}$, on définit alors une application lisse $f=(f_1,f_2)$ de Q dans $P^1\mathbf{R}\times P^1\mathbf{R}$ en posant

$$f_1([X,Y,Z,T]) = \begin{cases} [X,Z] & \text{pour} \quad (X,Z)\neq(0,0) \\ [T,Y] & \text{pour} \quad (T,Y)\neq(0,0) \end{cases}$$

et

$$f_2([X,Y,Z,T]) = \begin{cases} [X,T] & \text{pour} \quad (X,T)\neq(0,0) \\ [Z,Y] & \text{pour} \quad (Z,Y)\neq(0,0) \end{cases}$$

d) Si la forme quadratique est de type (r,s) (avec $rs\neq 0$ si l'on veut que Q soit non vide), on vérifie que Q est difféomorphe au quotient de $S^{r-1}\times S^{s-1}$ par la " double antipodie " $(x,y)\mapsto(-x,-y)$.

8*. Pour plonger T^3 dans $\mathbf{R}^4$, l'idée est " d'épaissir " le plongement $(\theta,\varphi)\mapsto(e^{i\theta},e^{i\varphi})$ de T^2 dans $\mathbf{C}^2\simeq\mathbf{R}^4$. On prend par exemple

$$(\theta,\varphi,\psi)\mapsto\big(e^{i\theta}(1-\frac{\cos\psi}{2}),e^{i\varphi}(1-\frac{\sin\psi}{2})\big).$$

Le produit par lui-même du plongement standard donne un plongement $S^2\times S^2$ dans $\mathbf{R}^6$, dont l'image est incluse dans une sphère S^5. Il suffit alors de faire une projection stéréographique convenable.