# Loi fondamentale de la mécanique et premières applications

## 1. Enoncé et écriture de la loi

L'énoncé général de la loi fondamentale de la mécanique newtonienne est le suivant : il existe un référentiel, dit galiléen, ou absolu, dans lequel, à tout instant et pour toute partie d'un système mécanique, le torseur des quantités d'accélération est égal au torseur des quantités de mouvement.

Pour aller au-delà et, notamment, pour appliquer cette loi à tout domaine $D$ d'un fluide en mouvement, plusieurs étapes sont nécessaires. La première consiste à rappeler qu'un torseur représente à la fois la somme de certaines grandeurs vectorielles (par exemple des forces ou des accélérations) dans un certain domaine, et la somme de leurs moments par rapport à une origine donnée. Notons O l'origine choisie dans le référentiel galiléen, dans lequel la vitesse et l'accélération au point $\mathbf{x}$ et à l'instant $t$ s'écrivent $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ et $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x},t)$, de telle sorte que la quantité de mouvement de la masse d$m$ s'écrive $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\mathrm{d}m$ et que son moment par rapport à l'origine s'écrive $\mathbf{x}\times\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\mathrm{d}m$ Le torseur des quantités de mouvement d'un domaine $D$ a pour expression :

$$[K]=\begin{cases} \mathbf{K}=\int_D \mathbf{u}(\mathbf{x},t)\mathrm{d}m, \\ \mathbf{M}_\mathrm{O}(K)=\int_D \mathbf{x}\times\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\mathrm{d}m. \end{cases} \tag{1}$$

Le torseur des quantités d'accélération s'écrit :

$$[A]=\begin{cases} \mathbf{A}=\int_D \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x},t)\mathrm{d}m, \\ \mathbf{M}_\mathrm{O}(A)=\int_D \mathbf{x}\times\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x},t)\mathrm{d}m. \end{cases} \tag{2}$$

La seconde étape concerne l'expression de l'accélération de la particule qui passe en ce point à cet instant, laquelle ne doit pas être confondue avec la dérivée partielle de la vitesse par rapport au temps $\partial\mathbf{u}/\partial t$. En termes des variables d'Euler (voir le texte « Principe de conservation de la masse », situé dans l'item « les bases » de la partie pour les scientifiques) et notamment de la vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, l'accélération désigne en effet la grandeur suivante :

$$\boldsymbol{\gamma}=\lim_{\delta t\to 0}\left[\frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x},t+\delta t)-\mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{\delta t}\right], \tag{3}$$

où $\delta\mathbf{x}=\mathbf{u}\delta t$ de façon à ce que, aux deux instants $t$ et $t+\delta t$, les deux vitesses dont on effectue la différence soient celles de la même particule fluide. Avec la notation indicielle $i$=(1,2,3) l'expression (3) devient :

$$\gamma_i=\lim_{\delta t\to 0}\left[\frac{u_i(x_j+\delta x_j,t+\delta t)-u_i(x_j,t)}{\delta t}\right]. \tag{4}$$

En utilisant la convention de l'indice muet (dans tout monôme où un indice est répété, il est convenu que l'on fait la somme par rapport aux trois valeurs possibles de cet indice), le numérateur de la fraction du second membre peut s'écrire :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}\delta t+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta x_j+O\left(\delta t^2\right)=\left[\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}u_j\right]\delta t+O\left(\delta t^2\right) \qquad (5)$$

Lorsque $\delta t \to 0$, la limite de la relation (4), qui conduit à l'expression de l'accélération de la particule, est donc :

$$\gamma_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \text{ou encore } \boldsymbol{\gamma}=\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}. \qquad (6)$$

Cette dérivée par rapport au temps en suivant la particule est appelée *dérivée particulaire.* Son expression dans le cas d'une fonction scalaire est établie dans le texte voisin « Principe de conservation de la masse ». Pour la distinguer de la dérivée partielle, nous la notons en utilisant le « d » droit :

$$\gamma_i=\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}, \quad \text{ou encore} \quad \boldsymbol{\gamma}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}. \qquad (7)$$

Dans la suite, nous aurons aussi à utiliser la formule de la dérivée particulaire d'intégrales de volumes, comme celles des relations (1). Rappelons sans la justifier à nouveau cette formule, elle aussi établie dans le texte « Principe de conservation de la masse ». Pour toute fonction scalaire $f(\mathbf{x},t)$ la dérivée particulaire de l'intégrale

$$I(t)=\int_D f(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}V \qquad (8)$$

peut être écrite comme suit :

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\int_D\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\nabla\cdot(f\mathbf{u})\right]\mathrm{d}V=\int_D\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}+f(\nabla\cdot\mathbf{u})\right]\mathrm{d}V. \qquad (9)$$

On pourra vérifier l'égalité entre les deux formes ci-dessus en utilisant les relations (6). A titre d'exemple, si l'on choisit la fonction élémentaire $f=1$, l'intégrale $I(t)$ représente le volume $V$ du domaine $D$. La relation (9) donne immédiatement sa dérivée particulaire :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\int_D(\nabla\cdot\mathbf{u})\,\mathrm{d}V \qquad (10)$$

On pourra noter que cette relation illustre clairement la signification de la divergence du vecteur vitesse : c'est le taux de dilatation volumique du fluide.

Introduisons maintenant le torseur des efforts extérieurs, en distinguant la force $\mathbf{F}$ qui s'exerce sur chaque unité de masse intérieure à $D$, et la contrainte $\mathbf{T}$ (ou force par unité de surface) que le milieu extérieur exerce en tout point de la surface fermée $S$ qui limite le domaine $D$ :

$$[F]=\left\{\begin{array}{l}\int_D \mathbf{F}\,\mathrm{d}m+\oint_S \mathbf{T}\,\mathrm{d}S,\\ \int_D \mathbf{x}\times\mathbf{F}\,\mathrm{d}m+\oint_S \mathbf{x}\times\mathbf{T}\,\mathrm{d}S.\end{array}\right. \qquad (11)$$

La loi fondamentale de la mécanique appliquée au domaine $D$ limité par la surface fermée $S$ s'écrit :

$$[A]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[K]\left\{\begin{array}{l}\int_D\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u})+\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right]\mathrm{d}V=\int_D\rho\mathbf{F}\,\mathrm{d}V+\oint_S\mathbf{T}\,\mathrm{d}S,\\ \int_D\left[\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{x}\times\rho\mathbf{u})\right]\mathrm{d}V+\oint_S(\mathbf{x}\times\rho\mathbf{u})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S=\int_D(\mathbf{x}\times\rho\mathbf{F})\mathrm{d}V+\oint_S(\mathbf{x}\times\mathbf{T})\mathrm{d}S.\end{array}\right. \qquad (12)$$

## 2. Théorème des quantités de mouvement. Application aux jets

En utilisant le théorème de la divergence, on remarquera la variante suivante du premier membre de la première relation (12) :

$$\int_D \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right]\mathrm{d}V = \int_D \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u})\mathrm{d}V + \oint_S \rho\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S. \qquad (13)$$

L'intégrale sur la surface fermée $S$ obtenue en (13) s'interprète alors aisément : elle représente le débit de quantité de mouvement sortant de $S$. La première relation (12) dont l'apparence peut paraître complexe, en raison de la présence d'intégrales, se lit de la façon suivante : *la somme des forces extérieures appliquées à un domaine fluide est égale au débit de quantité de mouvement sortant, augmenté de la dérivée partielle par rapport au temps de la quantité de mouvement du domaine*. Dans les régimes permanents où cette dernière grandeur est identiquement nulle, l'expression du théorème des quantités de mouvement devient donc simplement : *la somme des forces extérieures appliquées à un domaine fluide est égale au débit de quantité de mouvement sortant.*

Ce théorème est puissant et particulièrement agréable à utiliser, puisqu'il ne conduit à aucun long calcul. La seule difficulté, qui requiert une certaine pratique pour conduire à des résultats intéressants, réside dans le choix du domaine $D$, couramment appelé le *domaine de contrôle*. Nous allons le vérifier, sur deux exemples relatifs à des jets, comme ceux issus de la tuyère d'un réacteur (cf. Chapitre 4, § 3, Figure 4.9 du livre), ou comme les jets des injecteurs de turbines Pelton (cf. Chapitre 8, § 4, Figure 8.11 du livre).

Soit un jet, issu d'une chambre de mise en pression dont nous ne détaillerons pas le fonctionnement puisque c'est inutile pour notre propos, comme représenté schématiquement sur la figure 1.

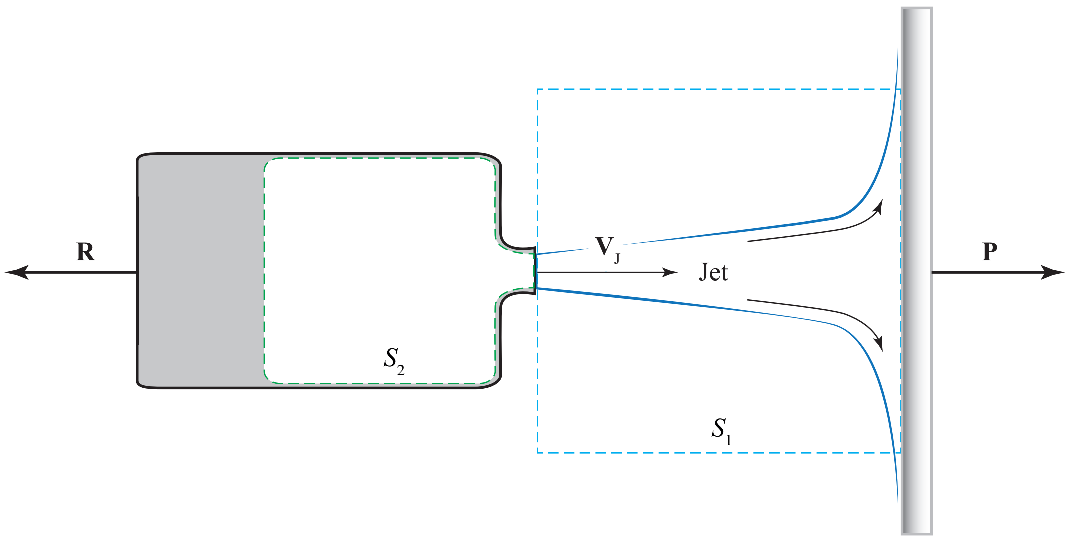


*Figure 1. Chambre de compression d'où un jet débouche à l'air libre à travers la section contractée d'une tuyère profilée et va ensuite frapper une paroi plane perpendiculaire à son axe. Les lignes en tirets, respectivement bleue et verte, marquent les contours des surfaces fermées $S_1$ et $S_2$, choisies successivement pour délimiter le domaine de contrôle.*

Après avoir franchi un injecteur assez bien profilé pour le contracter, le jet s'élargit progressivement et très lentement dans l'air ambiant, avant de venir frapper une paroi plane qui le détourne dans les directions perpendiculaires à son axe.

Choisissons d'abord le domaine de contrôle limité par la surface fermée $S_1$, dont le contour est de couleur bleue sur la figure 1. Comptons la pression à partir de sa valeur dans l'atmosphère ambiante, ce qui n'a aucune influence sur le résultat puisque cette valeur uniforme s'exerce sur toute la surface fermée $S_1$. Si $P$ désigne la poussée du jet sur la paroi dans la direction de l'axe du jet, la poussée de la paroi sur le domaine de contrôle est exactement l'opposé : $-P$. La projection sur l'axe du débit de quantité de mouvement sortant de $S_1$ s'écrit simplement : $-\rho Q V_\mathrm{J}$, où $\rho$ désigne la masse volumique du fluide (air ou eau), $Q$ le débit du jet, et $V_\mathrm{J}$ la vitesse du fluide dans la section contractée du jet. Le signe - signifie que le débit entre dans le domaine de contrôle. Il est clair, en effet, que la seule contribution non nulle au débit de quantité de mouvement, dirigée suivant l'axe sortant de $S_1$, provient de la section contractée du jet. Alors, le résultat cherché, à savoir l'expression de la poussée du jet sur la paroi, est immédiat : $P = \rho Q V_\mathrm{J}$.

Choisissons maintenant le domaine de contrôle limité par la surface fermée $S_2$, dont le contour est de couleur verte sur la figure 1. Le débit de quantité de mouvement dirigée suivant l'axe sortant de la section contractée est exactement $\rho Q V_\mathrm{J}$, avec le signe + puisqu'il est effectivement sortant. La seule force extérieure exercée sur cette surface $S_2$ est la résultante des actions de toutes les portions de paroi de la chambre de compression du jet, laquelle n'est autre que l'opposé de la réaction du jet $R$. Le résultat est encore extrêmement simple : $R = -\rho Q V_\mathrm{J}$.

Nous avons montré que la réaction du jet est exactement opposée au débit de quantité de mouvement sortant de l'éjecteur. C'est cette réaction qui propulse les avions justement dits *à réaction*. C'est à elle que les pompiers doivent être capables de s'opposer lorsqu'ils tiennent dans leurs mains une lance à incendie puissante.

## 3. Forme locale et application à la chute des corps dans le vide

Reprenons la loi fondamentale de la mécanique (12) sous la forme

$$\int_D \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right]\mathrm{d}V = \int_D \rho \mathbf{F}\,\mathrm{d}V + \oint_S \mathbf{T}\,\mathrm{d}S. \tag{14}$$

Avec la notation indicielle, elle s'écrit aussi :

$$\int_D \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]\mathrm{d}V = \int_D \rho F_i\,\mathrm{d}V + \oint_S T_i\,\mathrm{d}S. \tag{15}$$

Rappelons tout d'abord que la contrainte $\mathbf{T}$ possède en général une composante normale et une composante tangentielle à l'élément de surface considéré d$S$, comme représenté sur la figure 2.

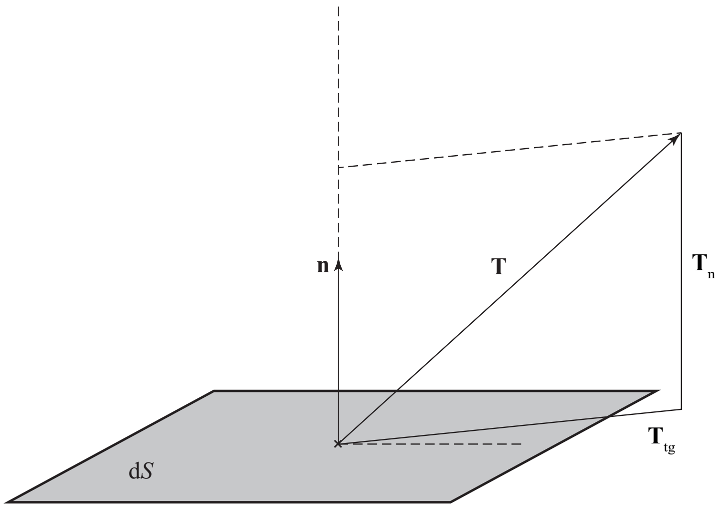


*Figure 2. Représentation de la contrainte* $\mathbf{T}$ *et de ses composantes normale et tangentielle.*

Elle peut s'écrire comme une combinaison linéaire des composantes $\sigma_{ij}$ du tenseur de contrainte : $T_i = \sigma_{ij} n_j$. Le théorème de la divergence permet de transformer l'intégrale sur la surface fermée $S$ en une intégrale sur le domaine $D$, comme les deux autres intégrales de (15) :

$$\oint_S T_i \,\mathrm{d}S = \oint_S \sigma_{ij} n_j \,\mathrm{d}S = \int_D \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \mathrm{d}V, \tag{16}$$

et de mettre ainsi cette équation globale sous la forme :

$$\int_D \left[ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho F_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] \mathrm{d}V = 0. \tag{17}$$

Puisque cette relation doit être satisfaite quel que soit le domaine $D$, il faut que l'intégrande soit nul en tout point. Nous avons ainsi établi la *forme locale de l'équation fondamentale de la mécanique* des milieux continus:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho F_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \tag{18}$$

Pour appliquer ces équations (17) ou (18) à des conditions données, il faut encore disposer des expressions des composantes $\sigma_{ij}$ et $F_i$. Celle des composantes $F_i$ est très simple dans toutes les applications où le seul champ de force extérieure est celui de la pesanteur, puisqu'alors la seule composante non nulle est la gravité $g$, dirigée dans le sens de la verticale descendante. Et les conditions où $\sigma_{ij}$ possède l'expression la plus simple sont celles où le milieu extérieur est vide et ne peut donc exercer aucune action sur la surface $S$ : $T_i \equiv \sigma_{ij} \equiv 0$.

Intéressons nous donc à la chute d'un corps solide dans le vide, qui constitue une référence indispensable. Notons $m = \rho V$ la masse de ce corps, invariante au cours de son mouvement, et $U$ sa vitesse, dirigée vers le bas et uniforme ce qui implique que les dérivées $\partial u_i / \partial x_j$ soient identiquement nulles, mais variable en fonction du temps. Les équations (17) ou (18), projetées sur la direction verticale dirigée vers le bas, se ramènent à la forme simple, en notant $h$ la hauteur de chute à tout instant $t$ :

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} - g = \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} - g = 0. \tag{19}$$

Celle-ci conduit immédiatement, en supposant que l'objet a été lâché sans vitesse initiale, aux relations bien connues :

$$U = gt = \sqrt{2gh}. \tag{20}$$

Lorsqu'un tel corps chute dans un gaz, comme l'air ambiant, le frottement sur sa surface n'est plus nul et la pression sur sa frontière n'est plus uniforme. Il faut alors disposer des relations qui permettent d'exprimer les composantes du tenseur de contrainte $\sigma_{ij}$ pour pouvoir reprendre cet exercice en tenant compte de la résistance de l'air, laquelle, on le sait, impose à la vitesse de chute une limite finie. Celles-ci sont explicitées dans le texte « Equation de Navier-Stokes », accessible à partir de l'item « Les bases » de la partie « Pour les scientifiques ».