

Ondes acoustiques dans les fluides compressibles

1. Equations des mouvements isentropiques

Plaçons-nous dans le cas d'un fluide qui satisfait aux hypothèses simplificatrices suivantes : il vérifie l'équation d'état des gaz parfaits, il est non pesant, non visqueux, non conducteur de la chaleur et il n'est soumis à aucune source de chaleur extérieure. Malgré leur caractère apparemment restrictif, ces hypothèses sont assez bien satisfaites dans l'atmosphère. Les équations locales, établies dans d'autres textes, tels que « Conservation de la masse », « Équation de Navier », « Loi fondamentale de la mécanique » et « Premier principe et équation de l'énergie », situés dans l'item « Les bases » de la partie « Pour les scientifiques », sont alors les suivantes :

$$\text{Équation d'état :} \quad \frac{p}{\rho} = \frac{R}{M} T \quad (1)$$

$$\text{Conservation de la masse :} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Mouvement :} \quad \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p \quad (3)$$

$$\text{Énergie :} \quad \rho C_p \frac{dT}{dt} - \frac{dp}{dt} = 0 \quad (4)$$

Une propriété très classique de toute transformation que peut subir une particule fluide dans de telles conditions se dégage immédiatement des équations (2) et (4). La différence entre (4) et sa variante $\rho C_v \frac{dT}{dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$ (voir le texte « Premier principe et équation de l'énergie ») conduit

à la relation $\rho(C_p - C_v) \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{u})$. Il suffit alors d'éliminer $\nabla \cdot \mathbf{u}$ en utilisant l'équation (2) pour parvenir à la relation

$$(C_p - C_v) \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad (5)$$

qui n'est autre que la forme différentielle de la relation $\frac{p}{\rho} = (C_p - C_v) T$, propriété bien connue des transformations réversibles. En éliminant maintenant la dérivée dT/dt entre les équations (4) et (5), on obtient la relation suivante

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{Cste}, \quad (6)$$

où $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, qui peut être considérée comme l'une des caractéristiques majeures des transformations isentropiques.

2. Equation des ondes acoustiques

Imaginons maintenant que le fluide considéré soit dans un état de repos, que l'on prend comme référence et que l'on caractérisera par les valeurs p_0, ρ_0, T_0 , et introduisons une petite perturbation. Notons s la perturbation relative de la masse volumique, de telle sorte que celle-ci s'écrive $\rho = \rho_0(1 + s)$. Supposons $s \ll 1$, et linéarisons les équations en négligeant tous les termes d'ordre s^2 et d'ordre supérieur.

La relation (6) montre que la pression devient $p = p_0(1 + \gamma s)$, et l'équation du mouvement (3) impose que le vecteur vitesse soit le gradient d'un potentiel scalaire φ : $\mathbf{u} = -\nabla\varphi$. Cette équation, qui devient alors $\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{p}{\rho}\right) = \mathbf{0}$, s'intègre aisément et impose que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} s. \quad (7)$$

Par ailleurs, l'équation de conservation de la masse (2) linéarisée s'écrit

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \Delta\varphi. \quad (8)$$

Il est alors élémentaire d'éliminer s entre (7) et (8), pour aboutir à l'équation des ondes acoustiques :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \Delta\varphi = 0. \quad (9)$$

Cette équation, où apparaît la différence entre les opérateurs du second degré $\partial^2/\partial t^2$ et Δ , possède la forme typique d'une équation d'ondes. En termes mathématiques, on peut dire qu'elle est de type hyperbolique. Notons donc $\gamma \frac{p_0}{\rho_0} = c^2$, de façon à faire apparaître la grandeur qui se révèle être la célérité c des ondes acoustiques. Dans un phénomène à une dimension, comme un tuyau d'orgue, en notant x l'unique coordonnée pertinente, l'équation se réduit encore à

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}. \quad (10)$$

On vérifie aisément qu'elle admet des solutions de la forme $\varphi = f(x + ct) + g(x - ct)$, représentant des ondes qui se propagent avec les célérités $-c$ et $+c$ dans la direction x . Pour préciser les fonctions f et g , il serait nécessaire de disposer d'informations précises sur la source sonore et sur les frontières du domaine, c'est-à-dire des conditions initiales et des conditions aux limites du problème.

Le cas d'une source ponctuelle émettant des ondes dans un milieu de dimensions infinies dans toutes les directions est lui aussi fort intéressant. Le système de coordonnées approprié est alors le repère sphérique, centré sur la source, où l'opérateur Laplacien s'écrit $\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2\varphi)$. L'équation

devient : $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r^2\varphi) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2\varphi)$. Ses solutions sont de la forme

$$\varphi = \frac{1}{r^2} f(r - ct), \quad (11)$$

et montrent que l'amplitude des ondes s'atténue comme $1/r^2$, c'est-à-dire en raison inverse de l'aire de la sphère centrée sur la source émettrice, lorsque l'on s'éloigne de plus en plus de celle-ci. Bien entendu, c'est la conservation de l'énergie de l'onde distribuée dans un domaine de plus en

plus vaste qui impose cette atténuation. Si l'on introduisait la dissipation visqueuse de l'énergie, l'atténuation serait nécessairement plus importante. Cette propagation est illustrée sur la figure 1, qui montre la situation observable aux instants $t, 2t, 3t, \dots$ après l'émission instantanée d'une secousse unique comme un choc. Les observateurs situés sur des sphères de rayons $ct, 2ct, 3ct, \dots$ perçoivent successivement cette information dont l'amplitude est progressivement atténuée.

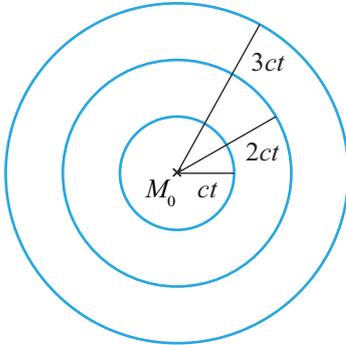


Figure 1. Illustration de la propagation d'une onde sonore émise par une source ponctuelle dans un gaz parfait compressible initialement au repos.

3. Application aux vols subsoniques et supersoniques des avions

Un avion vole à une vitesse V dans une atmosphère que nous supposons infinie dans toutes les directions. Nous pouvons assimiler à une source ponctuelle cet avion de taille très petite par rapport à l'immensité du milieu aérien qui l'entoure. Nous supposons aussi que l'atmosphère est au repos et que toutes ses propriétés physiques sont invariantes. Dans ces conditions simplifiées, la célérité des ondes sonores c est elle aussi invariante. La solution (11) serait légitime si l'avion demeurait au point fixe, et il est assez simple de la corriger de façon à tenir compte de la vitesse de l'avion. En pratique, il suffit de reprendre à chaque instant le dessin des fronts d'ondes sphériques, en les centrant sur la position convenable de l'avion.

Plaçons-nous à l'instant $t = 3t_1$, où t_1 désigne un pas de temps fixé. Les fronts d'ondes qui ont quitté la source à l'instant initial, quand l'avion était en M_0 , ont atteint la sphère de rayon $3ct_1$ centrée en M_0 . Ceux qui ont quitté l'avion à l'instant t_1 se sont propagés pendant la durée $2t_1$ à partir du point M_1 et ont atteint la sphère de rayon $2ct_1$ centrée en M_1 , à la distance $M_0M_1 = Vt_1$ de l'origine. Ceux qui ont quitté l'avion à l'instant $2t_1$ se sont propagés pendant la durée t_1 à partir du point M_2 et ont atteint la sphère de rayon ct_1 centrée en M_2 , à la distance $M_0M_2 = 2Vt_1$ de l'origine. En poursuivant cette construction, le changement par rapport à la figure 1 est clair : les sphères ne sont plus concentriques, comme illustré sur les figures 2, 3 et 4.

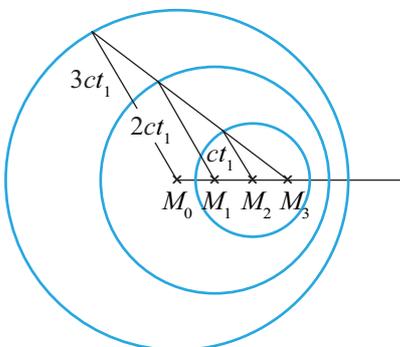


Figure 2. Illustration des fronts d'ondes successifs pendant le vol subsonique de la source émettrice, à la vitesse $V < c$, qui montre que ce sont de sphères excentrées et nichées les unes dans les autres.

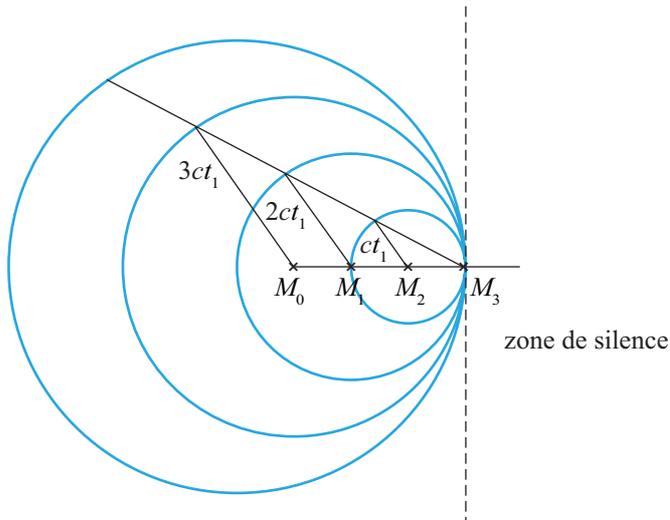


Figure 3. Fronts d'ondes successifs en régime exactement sonique ($V = c$).

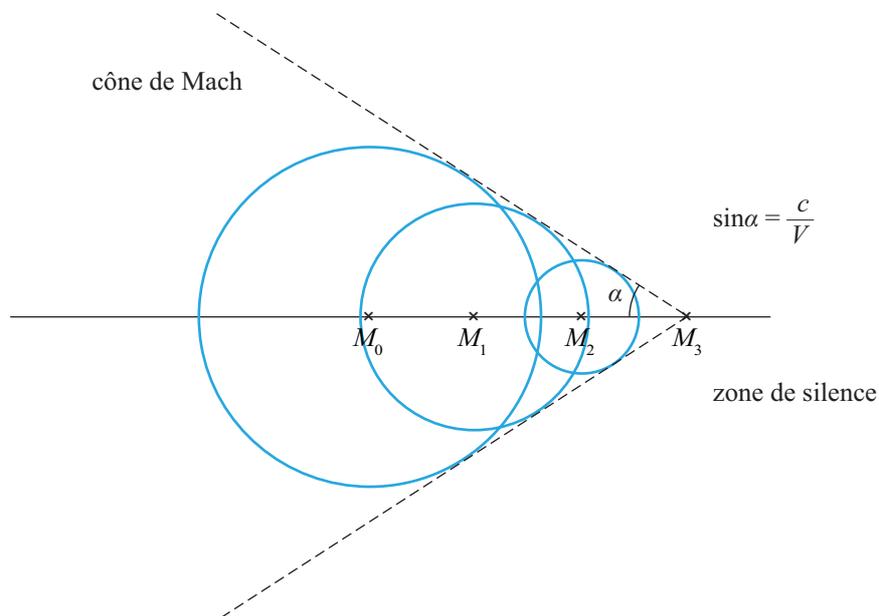


Figure 4. Fronts d'ondes successifs en régime supersonique ($V > c$), insérés dans le cône de Mach.

Dans le cas des vols subsoniques, où $V < c$, les déplacements de la source M_0M_1 ou M_0M_2 sont inférieurs au transit des fronts d'ondes. En conséquence, comme le montre la figure 2, ceux-ci sont des sphères excentrées qui ne se coupent pas. Notons que tout observateur, aussi éloigné soit-il de la source émettrice de bruit et dans quelque direction que ce soit, perçoit un signal et ne peut donc pas ignorer qu'un avion vole.

Le cas limite où $V = c$, et le cas extrême opposé des vols supersoniques, où $V > c$, illustrés respectivement sur les figures 3 et 4, se déduisent aisément par des raisonnements analogues. Le point important est la comparaison entre le transit de l'avion pendant un pas de temps t_1 , égal à Vt_1 , et le transit du front d'onde, égal à ct_1 . Il est clair qu'en régime supersonique le premier est plus grand que le second et qu'en conséquence, les fronts d'ondes sphériques doivent se couper. La figure 4 montre qu'ils ont alors une enveloppe commune, que l'on appelle le cône de Mach, dont le demi angle au sommet α est tel que $\sin \alpha = \frac{c}{V}$.

Le milieu situé à l'extérieur du cône de Mach est une zone de silence et de repos, où l'observateur ignore encore qu'un avion s'approche. Le son n'y parvient qu'avec l'onde de choc, qui constitue la frontière du cône de Mach et qui est solidaire de l'avion. Une importante énergie sonore s'est concentrée sur cette frontière, où les ondes acoustiques émises auparavant se sont rattrapées et se cumulent en formant le *bang* caractéristique et assourdissant. Dans les conditions exactement soniques ($V = c$) illustrées sur la figure 3, la frontière du cône de Mach est le plan perpendiculaire à la vitesse, passant par la position actuelle de l'avion (M_3), à l'amont duquel aucune information sur son vol n'a pu parvenir.