A PRÉREQUIS EN TOPOLOGIE

> Cette section propose des prérequis de topologie “générale” : tout d’abord la connexité, omniprésente en géométrie. Puis la notion d’application propre, qui intervient dans deux résultats fondamentaux et trop souvent négligés de calcul différentiel, le théorème de Hadamard–Lévy et le théorème d’Ehresmann.

A.1 Connexité

La connexité formalise en topologie le fait d’être d’un seul tenant. On peut dire qu’elle joue en géométrie et en topologie un rôle tout aussi fondamental que celui de la compacité en analyse.

Définition A.1. *Un espace topologique X est* connexe *s’il satisfait à l’une des propriétés suivantes (clairement équivalentes) :*

1. *Il n’existe pas de partition non triviale de X en deux ouverts ;*
2. *Il n’existe pas de partition non triviale de X en deux fermés ;*
3. *Les seules parties ouvertes et fermées de X sont X et $\emptyset$.*

Ces propriétés sont clairement équivalentes à la suivante, qui est particulièrement commode à utiliser :
Toute application continue de X dans $\{0,1\}$ est constante
On en déduit immédiatement que tout intervalle de $\mathbf{R}$ est connexe. Soit en effet f une application continue de X dans $\{0,1\}$. Si f n’est pas constante, il existe des points a et b de I (supposé non vide) tels que $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$. Il existe aussi, d’après le théorème des valeurs intermédiaires, un point $c \in]a,b[\subset I$ (si par exemple $a < b$) tel que $f(c) = \frac{1}{2}$, contrairement à l’hypothèse, suivant laquelle f ne prend que deux valeurs.
Attention. Si on adopte ce point de vue, il ne faut évidemment pas démontrer le théorème des valeurs intermédiaires en utilisant des arguments de connexité.
Le même critère permet de voir que tout produit de connexes est connexe, ainsi que la propriété suivante, très utile.

Proposition A.2. *Soit X un espace topologique. Supposons X réunion d’une famille $(C_i)_{i\in I}$ de connexes d’intersection non vide. Alors X est connexe.*

Démonstration. Soient $a \in \cap(C_i)_{i\in I}$, et f une application continue de X dans $\{0,1\}$. Supposons par exemple que $f(a) = 0$. Tout point $x \in X$ appartient à un C_i au moins, et comme la restriction de f à C_i est constante, on a aussi $f(x) = 0$. □

De même :

Proposition A.3. *L’image d’un connexe par une application continue est connexe.*

Démonstration. Si $f : X \to Y$ est continue, et si X est connexe, toute application continue $g : f(X) \to \{0,1\}$ est constante, puisque $g \circ f$ l’est. □

Définition A.4. *Un espace topologique X est* connexe par arcs *si quels que soient x et y dans X, il existe une application continue f d'un intervalle $[a, b]$ dans X telle que $f(a) = x$ et $f(b) = y$.*

Tout espace connexe par arc est connexe. C'est une conséquence directe des propositions A.2 et A.3. La réciproque est fausse, mais on a un résultat partiel utile pour les variétés.

Proposition A.5. *Tout ouvert connexe d'une variété topologique est connexe par arc.*

Démonstration. Sur un tel ouvert, on introduit la relation d'équivalence

$$xRy \Leftrightarrow \text{il existe un chemin continu de } x \text{ à } y.$$

Les classes d'équivalence sont ouvertes, et donnent une partition de U par des ouverts. Il n'y en a donc qu'une. $\square$

Notons enfin la propriété suivante, qui est une généralisation du lemme 4.29 du livre (la preuve est d'ailleurs la même !).

Théorème A.6. *Soit $p : E \to B$ une fibration de fibre type F. Si F et B sont connexes, E l'est aussi.*

Démonstration. Soit $f : E \to \{0, 1\}$ une application continue. Alors f est constante sur les fibres, donc passe au quotient en une application $\overline{f} : B \mapsto \{0, 1\}$, elle–même continue d'après la définition même d'une fibration. Donc $\overline{f}$ est constante, ainsi que $f = \overline{f} \circ p$. $\square$

A.2 Applications propres

Il s'agit d'une notion utile quand on étudie des variétés non compactes. Elle signifie intuitivement "continue à l'infini".

Définition A.7. *Une application continue d'un espace localement compact dans un autre est dite* propre *si l'image réciproque de tout compact est compacte.*

Cette idée de continuité à l'infini peut se mettre en forme en introduisant le *compactifié d'Alexandrov* d'un espace localement compact. Un tel espace X étant donné, on introduit sur $\tilde{X} = X \coprod \{\omega\}$ une topologie dont les ouverts sont

1. Les ouverts de X ;
2. Les parties de la forme $X \setminus K \cup \{\omega\}$, où K parcourt l'ensemble des parties compactes de X.

On vérifie que $\tilde{X}$ est compact. Si X est lui–même compact, ω est un point isolé de $\tilde{X}$ et ce n'est pas très intéressant, mais si X n'est pas compact, ω est adhérent à $\tilde{X}$. Enfin, si $f : X \to X'$ est une application continue d'un espace localement compact dans un autre, que l'on prolonge en $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ en posant $\tilde{f}(\omega) = \omega'$, l'application prolongée $\tilde{f}$ est continue si et seulement si f est propre.

Exemple. Pour qu'une application continue f de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même soit propre, il faut et suffit que $\|f(x)\|$ tende vers l'infini quand $\|x\|$ tend vers l'infini.

Si $f : X \to Y$ est une application propre entre variétés (nous ne visons pas l'énoncé le plus général) l'image de tout fermé est fermée. Il suffit de vérifier la fermeture séquentielle. Soit F un fermé de X, et y un point de Y qui est limite d'une suite $\big(f(x_n)\big)_{n\geq 0}$. L'image réciproque de l'ensemble compact formé par cette suite et sa limite y est un compact de X qui contient les x_n. Alors, si $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ est une sous–suite convergente vers x, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(x) = y.$$

La propriété suivante est un complément utile à la proposition 2.28 du livre.

Proposition A.8. *Toute immersion injective et propre d'une variété dans une autre est un plongement.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que l'application concernée est un homéomorphisme sur son image. □

Le cas des submersions, plus délicat, est traité dans le complément Web du chapitre 3 "Constructions de difféomorphismes".