

Premier principe de la thermodynamique et équation de l'énergie

1. Le principe de conservation de l'énergie appliqué aux fluides en mouvement

Le premier principe de la thermodynamique peut s'énoncer ainsi : *dans un système en équilibre subissant une transformation quelconque, la somme du travail des forces extérieures T et de la quantité de chaleur fournie au système Q est :*

- nulle si la transformation est fermée,
- indépendante du chemin suivi sur le diagramme d'état dans le cas contraire.

La transformation la plus pertinente pour les fluides naturels que sont l'air et l'eau est celle subie par une portion quelconque d'un tel fluide entre deux instants t et $t + \delta t$. Notons alors δT et δQ le travail et la quantité de chaleur fournis pendant la durée δt , que l'on supposera très petite. Alors que δT et δQ dépendent du chemin suivi, le premier principe impose que leur somme en soit indépendante et soit donc une différentielle totale exacte que l'on peut écrire :

$$\delta T + \delta Q = dE_i, \quad (1)$$

où E_i désigne l'énergie interne du domaine fluide D , que l'on écrira $E_i = \int_D E dm$, en notant E l'énergie interne par unité de masse et $E dm$ celle de la masse dm .

Les fluides comme l'air et l'eau ne sont pas en équilibre. Toutefois, leur mouvement macroscopique est tellement lent par rapport à l'agitation des molécules qui les composent que cela justifie une généralisation du premier principe, basée sur l'*axiome de l'équilibre local*. Imaginons une particule fluide qui parcourt 1 m avec une vitesse située entre 1 m.s^{-1} et 100 m.s^{-1} . Son temps de transit est situé entre 1 s et 10^{-2} s. Par comparaison, l'intervalle de temps entre deux collisions successives d'une molécule est de l'ordre de 10^{-15} à 10^{-10} s (voir l'encart E1.3 sur la théorie cinétique des gaz dans le Chapitre 1 du livre). Le rapport entre ces deux durées, de l'ordre de 10^{12} s, est tellement grand qu'il autorise à considérer comme instantanées les interactions moléculaires, ou encore à admettre que le déséquilibre du fluide est assez faible pour considérer que le mouvement de toute particule soit assimilable à une suite d'états d'équilibre.

Ceci permet de généraliser l'expression du premier principe (1) en ajoutant au deuxième membre la variation d'énergie cinétique $\delta E_c = \frac{dE_c}{dt} \delta t$, où la dérivée est une dérivée particulière puisqu'elle est prise en suivant le domaine fluide dans son mouvement :

$$\delta Q + \delta T = dE_i + \delta E_c \quad (2)$$

Si l'on note P_e la puissance des forces extérieures, telle que $\delta T = P_e \delta t$, et P_{th} la puissance thermique fournie au système, telle que $\delta Q = P_{th} \delta t$, la relation (2) peut se mettre sous la forme

$$P_e + P_{th} = \frac{dE_i}{dt} + \frac{dE_c}{dt}. \quad (3)$$

Par ailleurs, le théorème de l'énergie cinétique, établi dans le texte « Théorème de l'énergie cinétique et relation de Bernoulli », accessible sous le même onglet « Les bases » de la partie « Pour les scientifiques », impose la relation :

$$P_c + P_c - D_\mu = \frac{dE_c}{dt}. \quad (4)$$

Dans cette relation, P_c désigne la puissance de compression et D_μ la dissipation d'énergie due à la viscosité du fluide, quantités dont la somme représente la puissance des efforts intérieurs au domaine D . L'apport du premier principe par rapport au théorème de l'énergie cinétique, que l'on peut isoler en effectuant la différence entre ces relations (3) et (4), se ramène donc à :

$$\frac{dE_i}{dt} = P_{th} - P_c + D_\mu. \quad (5)$$

Si l'on se limite aux conditions où l'air peut être considéré incompressible, la puissance de compression P_c doit être négligée. L'équation (5) se réduit alors à la forme

$$\frac{dE_i}{dt} = P_{th} + D_\mu. \quad (6)$$

dont l'interprétation est presque évidente : la somme des quantités de chaleur fournies de l'extérieur et libérées par frottement à l'intérieur du domaine fluide conduit à un accroissement de son énergie interne.

2. Loi de Fourier et forme locale de l'équation de l'énergie

Imaginons une couche matérielle immobile d'épaisseur uniforme et de dimensions très grandes dans les autres directions. L'une de ses frontières planes est maintenue à la température T_0 , l'autre est portée à la température $T_0 + \Delta T$, comme indiqué sur la figure 1.

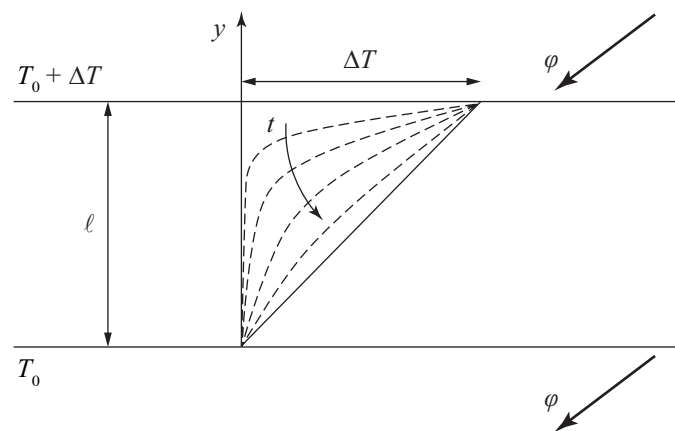


Figure 1. Représentation schématique d'une expérience de conduction de la chaleur à travers une couche de matière au repos.

On constate que la distribution de température au sein de cette couche se stabilise sous forme linéaire, qu'il faut fournir de l'extérieur au plan le plus chaud le flux de chaleur par unité de surface φ , et qu'il faut évacuer ce même flux de chaleur φ vers l'extérieur depuis l'autre frontière. Cette expérience montre aussi que ce flux de chaleur φ traverse tous les plans parallèles aux frontières et qu'il vérifie les relations globale et locale

$$\varphi = \kappa \frac{\Delta T}{\ell} = \kappa \frac{dT}{dy}, \quad (7)$$

où y désigne l'ordonnée dans la direction perpendiculaire aux frontières planes.

Conventionnellement, on introduit un signe $-$ au second membre, pour que le flux de chaleur soit positif lorsqu'il va des régions chaudes vers les froides. Par ailleurs, pour la généraliser à des formes complexes et à des géométries tridimensionnelles, on est amené à imaginer en tout point, au sein d'un domaine matériel traversé un flux de chaleur, un plan de coupe orthogonal à une normale unitaire \mathbf{n} . La relation (7) impose alors que le flux de chaleur par unité de surface dans la direction de cette normale s'écrive

$$\varphi = -\kappa(\mathbf{n} \cdot \nabla T). \quad (8)$$

Cette loi est connue sous le nom de loi de Fourier, en hommage à Joseph Fourier (1768-1830), qui réalisa des expériences pour vérifier cette loi alors qu'il était Préfet de Grenoble, et développa la théorie des séries de Fourier pour en dégager des solutions analytiques. La constante κ est la conductivité thermique du fluide. Sa valeur est de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-1} $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ dans les gaz comme l'air, et de 10^{-1} à 1 $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ dans les liquides comme l'eau. A titre de comparaison, elle peut atteindre 10 à 10^2 $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ dans les métaux en raison de leur bonne conduction électronique.

On notera l'analogie entre cette loi de Fourier et la loi d'Ohm ($j = -\sigma(dV/dy)$ dans les notations habituelles, où j désigne la densité de courant, σ la conductivité électrique et V le potentiel électrique). L'analogie avec la loi de Newton (voir le texte « Équation de Navier-Stokes », accessible dans l'item « Les bases » de la partie « Pour les scientifiques ») est aussi assez claire, malgré une différence importante, liée au fait que la grandeur physique transportée n'est plus un scalaire, la chaleur, mais un vecteur, la quantité de mouvement. Ces lois constituent les formes les plus simples des propriétés de transport, celles où le flux est proportionnel au gradient de la grandeur transportée.

3. Equation locale de l'énergie pour les phénomènes de conduction pure

Considérons un domaine D , limité par la surface fermée S , au sein d'une matière immobile, comme représenté sur la figure 2.

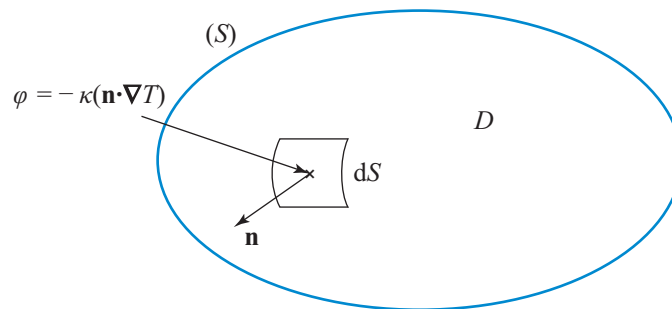


Figure 2. Représentation du flux de chaleur par unité de surface φ qui intervient dans les relations (8) et (10).

Dans les relations (5) et (6), les efforts intérieurs, la dissipation par viscosité et la puissance de compression sont identiquement nuls. Puisque l'énergie interne est une intégrale de masse, sa dérivée particulière s'écrit

$$\frac{dE_i}{dt} = \int_D \frac{dE}{dt} dm \quad (9)$$

et l'intégrande peut lui-même se mettre sous la forme $\frac{dE}{dt} = C \frac{dT}{dt}$, où C désigne la capacité

calorifique. Dans le cas des solides, ou des liquides, extrêmement peu compressibles, il n'y a pas lieu de distinguer la capacité calorifique à pression constante de celle à volume constant, qui ne diffèrent

que de 0,6 % au plus. Et dans le cas des gaz comme l'air, où cette distinction deviendrait tout à fait significative, l'hypothèse d'un milieu au repos n'est pas réaliste. Limitons-nous donc à cette écriture.

L'expression locale en tout point de S de la puissance thermique fournie au domaine se déduit de la loi de Fourier (8) :

$$P_{\text{th}} = \oint_S \kappa (\mathbf{n} \cdot \nabla T) dS = \int_D \nabla \cdot (\kappa \nabla T) dV. \quad (10)$$

Ici, la dernière forme faisant apparaître une intégrale sur le domaine D est obtenue à l'aide du théorème de la divergence. La relation (9) peut donc s'écrire en utilisant (6) :

$$\int_D \left[\rho C \frac{dT}{dt} - \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \right] dV = 0. \quad (11)$$

Pour que l'intégrale soit nulle quel que soit le domaine D , il faut que l'intégrande soit nul en tout point, et ceci conduit à l'équation locale de la conduction pure de la chaleur. Limitons-nous aux cas simples, où la conductivité thermique κ peut être supposée uniforme. Puisque le milieu est supposé au repos, la dérivée particulaire se ramène à la seule dérivée partielle par rapport au temps et l'équation locale prend la forme simple bien connue :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T \quad (12)$$

où n'apparaît qu'une seule propriété physique du milieu, sa diffusivité thermique $\alpha = \frac{\kappa}{\rho C}$.

On notera que cette diffusivité α est une grandeur purement cinématique, comme la viscosité ν . Dans l'eau à la température normale (15 °C) leurs valeurs respectives sont voisines de $\alpha \approx 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, de sorte que leur rapport, le nombre de Prandtl $Pr = \nu / \alpha$, est de l'ordre de quelques unités, ce qui signifie que l'eau diffuse un peu mieux la quantité de mouvement que la chaleur.

Dans le cas simple d'une tige longue et assez mince pour que l'on puisse négliger les variations de température dans la section droite par rapport aux variations longitudinales, on peut former des solutions élémentaires de cette équation. Notons x l'abscisse le long de cette tige. L'équation (12) devient

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (13)$$

Elle admet des solutions de la forme $T(x,t) = C t^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha t}\right)$, qui montrent que la variation de

T s'étale sur une longueur qui s'accroît en fonction du temps comme $\sqrt{2\alpha t}$, en même temps que son amplitude maximale diminue comme $t^{-\frac{1}{2}}$. La linéarité de l'équation (13) permet par ailleurs de former des combinaisons linéaires de solutions de la même forme, et de donner une portée assez générale à cette propriété d'étalement en $\sqrt{2\alpha t}$ d'une surchauffe initiale.

4. Equation locale de l'énergie en présence de convection

Dans des fluides comme l'air et l'eau, qui sont en général en mouvement, on doit revenir à l'équation (5), où l'on négligera cependant la dissipation visqueuse D_μ , car le nombre de Reynolds étant extrêmement grand, les effets visqueux sont très faibles dans les phénomènes auxquels on s'intéresse. Le terme nouveau à faire intervenir est alors la puissance de compression

$$P_c = \int_D p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) dm. \quad (14)$$

L'équation (5) devient :

$$\int_D \left[\frac{dE}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] dm = \int_D \nabla \cdot (\kappa \nabla T) dV \quad (15)$$

Au premier membre, on reconnaît la quantité $dE + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \delta Q = TdS$, qui représente la quantité de chaleur fournie de l'extérieur à une masse unité appartenant au domaine D . En l'écrivant TdS , on tient compte du second principe de la thermodynamique, suivant lequel la variation de l'entropie par unité de masse dS doit être une différentielle totale exacte. La forme locale de cette équation est alors :

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \quad (16)$$

Puisque l'entropie est une variable d'état, tout comme l'énergie interne, elle s'exprime en fonction des deux variables principales choisies *a priori*. Dans notre cas, ce sera la pression p et la masse volumique ρ . Il est alors classique d'écrire

$$TdS = C_p dT + \frac{T}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dp, \quad (17)$$

où C_p désigne la capacité calorifique à pression constante. La forme locale de l'équation de l'énergie devient alors :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} + \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{dp}{dt} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (18)$$

Au premier membre la dérivée $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ peut se déduire de l'équation d'état. Dans le cas de l'air, qui

vérifie assez bien l'équation des gaz parfaits, on obtient $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -\frac{\rho}{T}$. L'équation locale s'écrit

alors :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} - \frac{dp}{dt} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (19)$$

On pourrait vérifier qu'en choisissant la capacité calorifique à volume constant C_v on obtiendrait la variante :

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} + p \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (20)$$

Dans l'équation (19), il est intéressant de comparer les ordres de grandeurs des deux termes du premier membre. La variation de pression peut s'estimer à partir de la relation de Bernoulli $\delta p \approx \rho U^2$, où U désigne une vitesse typique du fluide. Si l'on note Θ l'ordre de grandeur des variations de température, on obtient :

$$\frac{\delta p}{\rho C_p \delta T} \approx \frac{U^2}{C_p \Theta} \quad (21)$$

Dans l'air, pour que ce nombre sans dimension $\frac{U^2}{C_p \Theta}$ atteigne des valeurs de l'ordre de l'unité, il est nécessaire que la vitesse soit proche de la vitesse du son.

A titre d'exemple, puisque $C_p \approx 10^3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, avec $U \approx 300 \text{ m.s}^{-1}$ et $\Theta \approx 100 \text{ K}$ on trouve $\frac{U^2}{C_p \Theta} \approx 0,9$. Mais dès que la vitesse est 10 fois plus faible (de l'ordre de 30 m.s^{-1}), ce nombre devient très petit (de l'ordre de 10^{-2}) et le second terme du premier membre devient négligeable par rapport au premier. En conséquence, dans les conditions des dépressions atmosphériques et des vents thermiques, nettement subsoniques, l'équation (19) peut se ramener à

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (22)$$

Si, par ailleurs, les propriétés physiques du fluide peuvent être supposées invariantes, on peut introduire sa diffusivité thermique $\alpha = \frac{\kappa}{\rho C_p}$ et simplifier encore l'équation en la ramenant à la forme suivante, exactement comme on l'a fait plus haut dans les problèmes de conduction pure :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \alpha \Delta T. \quad (23)$$

Dans l'eau, pratiquement incompressible et donc très éloignée des conditions soniques, cette approximation est encore mieux justifiée. Les deux capacités calorifiques C_p et C_v sont d'ailleurs très voisines, comme dans les solides.

L'élément nouveau par rapport à l'équation de la conduction pure (12), qui doit donc être compris comme la caractéristique essentielle des phénomènes de convection, est la présence de la vitesse \mathbf{u} au premier membre de (23). Pour apprécier l'importance de ce terme de convection $\mathbf{u} \cdot \nabla T$, mettons l'équation (23) sous forme adimensionnelle, en introduisant une échelle de longueur L et en prenant L/U comme échelle de temps. En conservant les mêmes notations pour les grandeurs adimensionnées, l'équation devient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{\alpha}{UL} \Delta T. \quad (24)$$

Le nombre sans dimension $Pe = \frac{UL}{\alpha}$ est le nombre de Péclet, tout à fait analogue au nombre de Reynolds : $Pe = Re Pr$. Puisque $Re \gg 1$ et $Pr \approx 1$ à 10 dans la plupart des conditions atmosphériques ou marines, il est clair que ce nombre de Péclet doit, lui aussi, être très supérieur à l'unité. En conséquence, les variations de température sont concentrées dans une couche limite thermique située au voisinage des frontières plus chaudes ou plus froides que le fluide ambiant, dont l'épaisseur doit être de l'ordre de $L Pe^{-1/2}$, dans laquelle la diffusion doit être prise en compte. Au-delà de cette couche limite, la diffusion devenant négligeable, l'équation (24) impose la nullité de la dérivée particulaire $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T$, ce qui signifie que la température de chaque particule fluide demeure invariante le long de sa trajectoire.