

Introduction à la théorie linéaire de la stabilité hydrodynamique

Qu'il s'agisse des milieux aériens ou marins, dans plusieurs chapitres du livre et surtout dans l'annexe, diverses familles d'instabilités ont été évoquées : instabilité de Rayleigh-Bénard pour les couches fluides chauffées par dessous, instabilité de Kelvin-Helmholtz au voisinage des interfaces cisillées, et d'autres encore comme l'apparition soudaine de bouffées turbulentes dans les écoulements en conduites. Les mécanismes physiques responsables de ces comportements ont été commentés, les conditions telles que ces instabilités puissent se développer ont été brièvement rappelées, et les cheminements complexes depuis ces instabilités vers la turbulence ont été discutés. Intéressons-nous ici à la théorie linéaire qui permet de dégager les conditions d'apparition de ces instabilités, en nous limitant au cas fort important des fluides incompressibles. Nous utiliserons des équations adimensionnées qui, au lieu des paramètres physiques du fluide, font apparaître des nombres sans dimension comme le nombre de Reynolds Re .

1. La démarche générale de la théorie linéaire

Un régime d'écoulement stable est supposé exister, dont les propriétés sont connues. Toutefois, de façon à donner à cette analyse un caractère aussi générique que possible, nous ne les explicitons pas. Notons \mathbf{U} et P , respectivement, la vitesse et la pression qui doivent vérifier les équations et les conditions aux limites de ce régime stable. Admettons qu'une perturbation, que nous noterons \mathbf{u} , p lui soit superposée, de telle sorte que les vrais champs de vitesse et de pression, qui vérifient les mêmes équations et conditions aux limites que le régime stable, s'écrivent : $\mathbf{U} + \mathbf{u}$, $P + p$. On peut retrancher de ces équations et conditions aux limites, terme à terme, celles vérifiées par l'écoulement stable, de façon à obtenir les équations des perturbations \mathbf{u} , p . La théorie linéaire suppose que la perturbation est assez petite pour que les équations qui la caractérisent soient linéarisées. Elles s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u_i + f_i \end{array} \right. \quad (1)$$

Et les conditions aux limites, que nous n'écrivons pas car elles sont spécifiques à chaque problème traité, imposent en général que les perturbations de vitesse \mathbf{u} et de pression p soient nulles ou continues sur les frontières.

Il est clair que les équations (1), qui forment un système linéaire et homogène, admettent la solution évidente où vitesse et pression sont identiquement nulles. Elles ne peuvent admettre d'autre solution, qui caractériserait la présence d'une perturbation dans l'écoulement, que si certaines *conditions de solvabilité* sont satisfaites. Et le premier objectif de la théorie linéaire consiste à rechercher ces conditions.

Puisque le système des équations et conditions aux limites est linéaire, il doit admettre des solutions à variables séparées, que l'on peut écrire sous la forme

$$u_i = \text{Re}\{\tilde{u}_i(\mathbf{x})\exp(-i\omega t)\}, \quad p = \text{Re}\{\tilde{p}(\mathbf{x})\exp(-i\omega t)\}. \quad (2)$$

Limitons nous à considérer des écoulements plans situés entre des frontières dont la normale est choisie comme direction Oz. Les amplitudes \tilde{u}_i , \tilde{p} peuvent elles-mêmes être décomposées en

modes normaux en écrivant chaque grandeur $\tilde{g}(\mathbf{x})$ à valeur scalaire sous la forme d'une somme infinie de tels modes :

$$\tilde{g} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\mathbf{k}}(z) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k}. \quad (3)$$

Chaque mode est ainsi caractérisé à la fois par une distribution $G_{\mathbf{k}}(z)$, que l'on peut appeler une *fonction propre*, essentiellement contrôlée par les conditions aux limites, et par un *vecteur d'onde* $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$. On comprend bien que, lorsque les composantes k_x et k_y sont des nombres réels,

chaque mode représente une perturbation sinusoïdale de longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}$. La partie

imaginaire de ω représente le *taux d'amplification* du mode considéré, de sorte que celui-ci sera amplifié si $\text{Im}\{\omega\} > 0$. Il sera au contraire amorti si $\text{Im}\{\omega\} < 0$. La partie réelle de ω représente la *pulsation* de cette perturbation. Dans les cas où cette pulsation est non nulle, les modes

correspondants représentent des ondes qui se propagent avec la vitesse de phase $\frac{\text{Re}\{\omega\}}{|\mathbf{k}|}$. Dans les

cas où la pulsation est nulle, les modes correspondants représentent des structures tourbillonnaires amplifiées ou amorties.

La linéarité du système d'équations et de conditions aux limites permet d'analyser séparément la stabilité de chaque mode. Pour que l'écoulement soit stable, il faut que tous les modes le soient. Pour qu'il devienne instable, il suffit qu'il existe une valeur de \mathbf{k} telle que $\text{Im}\{\omega\} > 0$. Lorsque $\text{Im}\{\omega\} = 0$, le régime est dit *marginal*.

Comme dans tout problème linéaire et homogène, le système des équations (1) et des conditions aux limites associées ne peut être vérifié par des solutions compatibles avec les relations (2) et (3) que si une *équation caractéristique* est satisfaite. Celle-ci est nécessairement de la forme

$$f(\omega, k_x, k_y, Re, \dots) = 0. \quad (4)$$

L'équation caractéristique (4) relie les paramètres du mode considéré (ω, k_x, k_y) aux paramètres de l'écoulement (Re, \dots), au nombre desquels on peut aussi compter le nombre de Froude, le nombre de Rayleigh, ou encore le nombre de Bond, suivant l'écoulement considéré. Le premier enjeu de la théorie linéaire consiste donc à obtenir cette équation caractéristique.

On peut ensuite rechercher l'état marginal, qui prend nécessairement une forme du type $Re = f(\text{Re}\{\omega\}, k_x, k_y)$. Elle conduit à tracer une *courbe neutre*, en séparant deux domaines : celui où $\text{Im}\{\omega\} > 0$, qui correspond aux conditions instables, et celui où $\text{Im}\{\omega\} < 0$ qui correspond aux conditions stables, comme représenté sur la figure 1.

Sur la figure 1, pour un nombre Re donné supérieur au minimum Re_{crit} , obtenu pour la valeur particulière k_{crit} du nombre d'onde, tous les modes dont le nombre d'onde est situé dans la bande $[k_{\text{min}}, k_{\text{max}}]$ sont instables. Tous ceux situés de part et d'autre de cette bande sont stables. Le nombre k_{crit} caractérise donc le premier mode susceptible de devenir linéairement instable et Re_{crit} représente le seuil d'apparition de cette instabilité. Il va de soi que la grandeur portée en ordonnée sur la figure 1 peut être un autre nombre sans dimension que le nombre de Reynolds. Ainsi, dans le cas de l'instabilité de Rayleigh-Bénard (couche de fluide chauffée par dessous), c'est le nombre de Rayleigh.

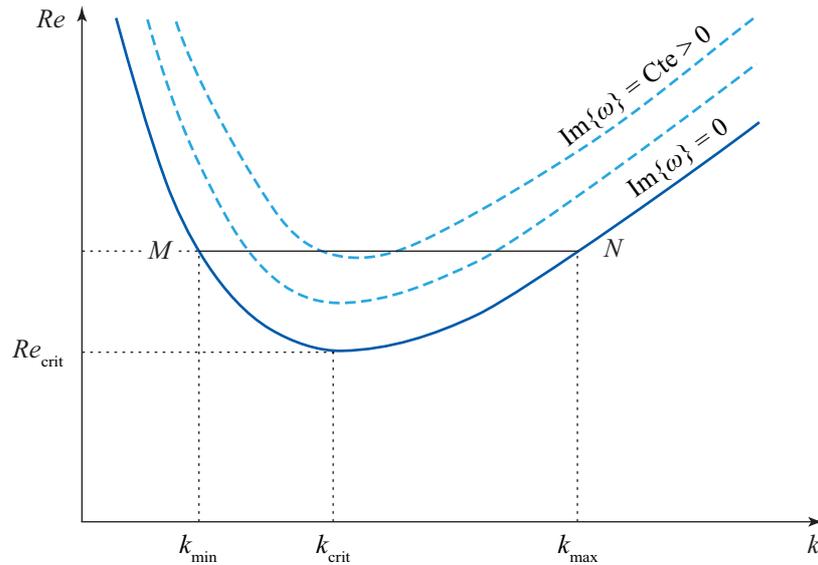


Figure 1. Schéma de principe de la courbe neutre et des conditions critiques.

2. Application à la stabilité des interfaces fluides

Pour illustrer la démarche présentée dans la section précédente, considérons l'exemple de deux couches fluides de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 , s'écoulant à des vitesses $-V$ et $+V$ de part et d'autre d'une interface plane et horizontale située à l'altitude $z=0$. Les vitesses et pressions du régime non perturbé s'écrivent :

$$\mathbf{U} = \begin{cases} V \mathbf{e}_x, \\ -V \mathbf{e}_x, \end{cases} \quad P = \begin{cases} P_0 - \rho_2 g z, \\ P_0 - \rho_1 g z. \end{cases} \quad (5)$$

De façon à mettre l'accent sur les phénomènes liés à la gravité $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$, au cisaillement (V) et à la tension superficielle (σ), supposons que l'influence de la viscosité de ces deux fluides soit négligeable. Dans de telles conditions, l'écoulement perturbé par toute déformation de l'interface dérive d'un potentiel $\varphi(x, y, z, t)$, de sorte que $\mathbf{u} = -\nabla \varphi$. L'équation de continuité impose à ce potentiel de vérifier l'équation de Laplace $\Delta \varphi = 0$. Ecrivons la déformation de l'interface comme la somme de modes normaux de la forme :

$$\eta = \text{Re} \left\{ A \exp(i(k_x x + k_y y - \omega t)) \right\}, \quad (6)$$

où la constante A est arbitraire.

Les conditions aux limites de cette situation particulière imposent que, loin de l'interface, les écoulements soient de nouveau uniformes, c'est-à-dire que la perturbation s'annule :

$$\varphi_1(x, y, -\infty, t) = \varphi_2(x, y, +\infty, t) = 0. \quad (7)$$

Par ailleurs, en tout point de l'interface, chaque fluide doit avoir le même déplacement vertical que celui de l'interface elle-même :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(x, y, \eta, t) = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} - V \frac{\partial \eta}{\partial x} = -i\eta(Vk_x + \omega), \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(x, y, \eta, t) = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + V \frac{\partial \eta}{\partial x} = i\eta(Vk_x - \omega). \end{cases} \quad (8)$$

Ces conditions et l'équation de Laplace suffisent à déterminer la perturbation de vitesse imposée par la déformation de l'interface. La décomposition en modes normaux $\varphi = \Phi(z)\exp(i(k_x x + k_y y - \omega t))$ conduit à l'équation différentielle ordinaire pour l'amplitude Φ :

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)\Phi = 0, \quad (9)$$

où l'on a noté $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. La solution de (9) qui vérifie les conditions aux limites s'écrit :

$$\Phi_1 = -\frac{iA}{k}(\omega + Vk_x)\exp(-kz + i(k_x x + k_y y - \omega t)), \quad \Phi_2 = \frac{iA}{k}(\omega - Vk_x)\exp(kz + i(k_x x + k_y y - \omega t)). \quad (10)$$

En fluide non visqueux, la pression de part et d'autre de l'interface se déduit de la relation de Bernoulli en régime non-stationnaire $p + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho U \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \rho g z = \text{Cste}$. On a donc

$$p_1(\eta) = B_1 - \rho_1 g \eta - \rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \rho_1 V \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad p_2(\eta) = B_2 - \rho_2 g \eta - \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \rho_2 V \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}. \quad (11)$$

Il reste à exprimer le saut de pression à l'interface, qui fait intervenir la tension superficielle σ et les rayons de courbure de l'interface R_1 et R_2 : $p_2 - p_1 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$. En utilisant les expressions (11), où les constantes B_1 et B_2 n'ont aucune influence, on obtient la relation

$$(\rho_1 + \rho_2) \frac{\omega^2}{k} + (\rho_1 - \rho_2) 2V \frac{\omega k_x}{k} + (\rho_1 + \rho_2) \frac{V^2 k_x^2}{k} - (\rho_1 - \rho_2) g - \sigma k^2 = 0. \quad (12)$$

Celle-ci est précisément l'équation caractéristique recherchée. Sous la forme (12) elle est encore complexe car elle fait intervenir les trois paramètres susceptibles d'influer sur la stabilité de l'interface : le cisaillement par V , la gravité g et la tension superficielle σ .

3. Exemples des instabilités de Rayleigh-Taylor et de Kelvin-Helmholtz

Commençons par le cas particulier le plus simple, où les deux fluides superposés sont au repos, dont les propriétés sont résumées dans l'annexe (section 1.b) du livre. En annulant V l'équation caractéristique devient

$$\omega^2 = gk \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{\sigma k^2}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (13)$$

Il est clair que, si $\rho_1 > \rho_2$ (fluide le plus lourd au-dessous), ω est réel et l'interface est linéairement stable. Dans le cas contraire où $\rho_1 < \rho_2$, seule la tension superficielle σ peut contrer l'effet déstabilisant de la gravité. Pour déstabiliser l'interface en permettant que $\text{Im}\{\omega\} > 0$, il suffit que la condition $\rho_2 - \rho_1 > \frac{\sigma k^2}{g}$ soit satisfaite. Alors, tous les modes dont le nombre d'onde est inférieur à

$k_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{\sigma}}$ sont instables. Dans ces conditions, il n'existe pas de seuil critique, mais

simplement une longueur d'onde critique $\lambda_{\text{crit}} = \frac{2\pi}{k_{\text{crit}}}$. Toutes les perturbations possédant une échelle de longueur supérieure à celle-ci sont instables.

Dans les conditions courantes et très stables entre une masse d'eau ($\rho_1 \approx 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$) au-dessous de l'air beaucoup plus léger ($\rho_2 \approx 1 \text{ kg.m}^{-3}$), l'information importante fournie par la relation (13) est la célérité avec laquelle chaque mode peut se propager, que l'on appelle la vitesse de phase :

$$v_{\text{ph}} = \sigma \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho_1}}. \quad (14)$$

La façon dont cette vitesse varie en fonction du nombre en fonction du nombre d'onde sans dimension $k \sqrt{\frac{\sigma}{g\rho_1}}$ est représentée sur la figure 2.

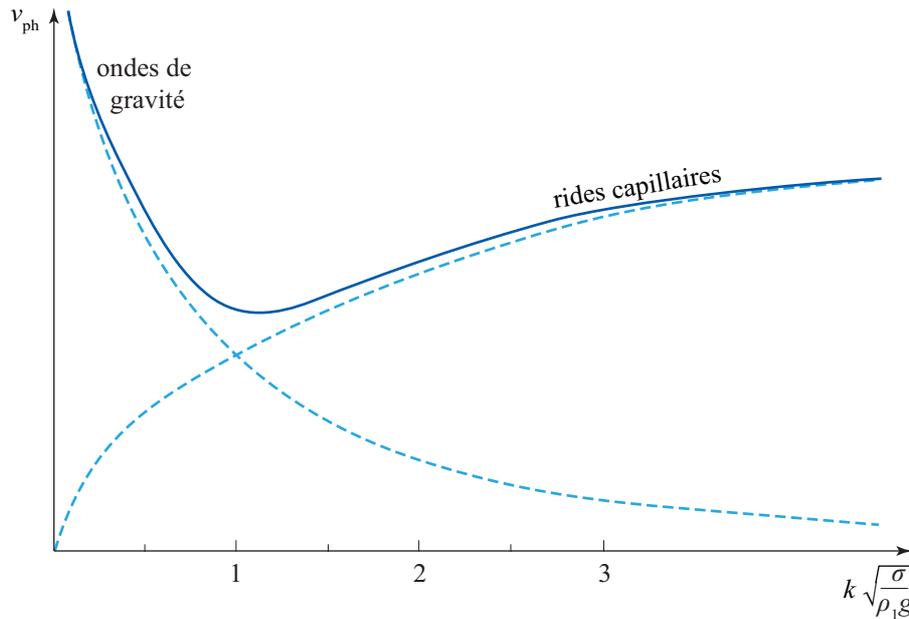


Figure 2. Variation de la vitesse de phase $v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k}$ en fonction de $k \sqrt{\frac{\sigma}{g\rho_1}}$. Les branches asymptotiques pour $k > k_*$, ou $k < k_*$, correspondent, respectivement, aux rides capillaires et aux ondes de gravité.

La branche asymptotique pour les nombres d'ondes assez petits pour que l'effet de σ soit négligeable correspond aux ondes de gravité. L'autre branche asymptotique, pour les nombres d'ondes assez grands pour que l'effet de la gravité soit négligeable, correspond aux rides capillaires.

Revenons à l'équation caractéristique (12), du second degré en ω . Pour qu'il y ait instabilité, il faut que le discriminant soit négatif, ce qui impose deux racines imaginaires conjuguées, dont l'une possède une partie imaginaire positive. Les perturbations les plus instables sont celles où $k_y = 0$. Elles s'amplifient dès que

$$4V^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} > \frac{g}{k}(\rho_1 - \rho_2) + \sigma k. \quad (15)$$

La courbe neutre met en évidence un minimum pour le second membre de l'équation (15), comme montré sur la figure 3.

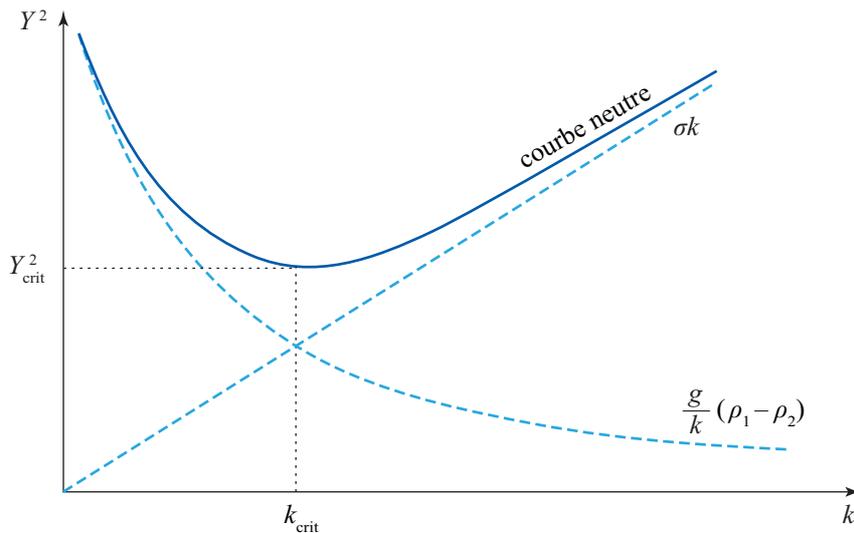


Figure 3. Courbe neutre pour l'instabilité de Kelvin-Helmholtz.

La grandeur portée en ordonnées est $Y^2 = \frac{g}{k}(\rho_1 - \rho_2) + \sigma k$.

Celui-ci a pour coordonnées $k_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\sigma}}$ et $Y_{\text{crit}}^2 = \frac{2g(\rho_1 - \rho_2)}{k_{\text{crit}}}$. La valeur critique de la

vitesse $V_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{g}{k_{\text{crit}}} \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{\rho_1 \rho_2}}$ s'en déduit aisément. Dans le cas usuel de l'air et de l'eau, ces valeurs critiques ont des ordres de grandeurs voisins de : $k_{\text{crit}} \approx 3,6 \text{ cm}^{-1}$, $\lambda_{\text{crit}} \approx 1,7 \text{ cm}$ et $V_{\text{crit}} \approx 14,4 \text{ m.s}^{-1}$.