Aperçu sur les théories non linéaires de la stabilité hydrodynamique

Dans le texte sur la théorie linéaire de la stabilité hydrodynamique, accessible sur ce site sous le même item «Justifications théoriques» de la partie « Pour les scientifiques », il est montré que cette théorie permet de prédire les conditions marginales à partir desquelles une instabilité peut se développer. Dans certains cas, comme celui d'une couche fluide chauffée par-dessous, ces conditions constituent des seuils critiques pour les paramètres qui caractérisent l'énergie fournie au fluide et pour les premiers modes déstabilisés. Dans d'autres cas, comme celui des interfaces fluides cisaillées, où il n'existe pas de seuil, elles ne fixent que certaines propriétés de la perturbation marginale (nombre d'onde, vitesse de phase), elles aussi dites critiques. Mais cette théorie linéaire ne peut en aucun cas fournir l'évolution temporelle de la perturbation au-delà des conditions critiques. Au contraire, comme on a pu le lire dans l'annexe du livre : « L'air et l'eau », même si c'est au prix de difficultés techniques quelques fois redoutables, l'expérience donne accès à cette évolution et aux caractéristiques des états perturbés. Elle révèle que la transition du régime initial stable et laminaire au régime ultime et turbulent peut emprunter des chemins variés. Du point de vue de la théorie, seul l'emploi de méthodes non linéaires permet de prédire cette évolution. Devant cet enjeu, en quelques pages, tentons de situer quelques repères importants qui pourront aider le lecteur à s'orienter vers des lectures plus détaillées et plus complexes sur les théories non linéaires des instabilités hydrodynamiques.

1. Notion de bifurcation

Dans le régime stable, par définition, l'amplitude de la perturbation est identiquement nulle. Par contre, au-delà des conditions critiques à partir desquelles des instabilités peuvent se développer, les grandeurs caractéristiques de l'écoulement, comme la vitesse, la pression ou la température, manifestent des fluctuations spatiales ou temporelles d'amplitude finie. En général, cette amplitude, que nous noterons A, dépend de la valeur du paramètre de contrôle de l'écoulement, que nous noterons R, supposant qu'il a été rendu adimensionnel et mis sous la forme d'un nombre de Reynolds ou d'un nombre de Rayleigh. Il est donc naturel de situer la transition sur un diagramme montrant la variation de A en fonction de R. Deux transitions tout à fait typiques, qui sont appelées *bifurcations*, sont représentées sur la figure 1.

La première (fig. 1(a)) représente une perturbation dont l'amplitude A atteint une valeur stationnaire, systématiquement croissante en fonction du paramètre R au-delà d'un seuil R_*. En général, le signe de A n'est pas déterminé. Effectivement, dans le problème de Rayleigh-Bénard, le sens dans lequel tourne le fluide au sein d'une cellule particulière est arbitraire. Cette transition est une *bifurcation fourche ;* elle appartient à la catégorie des *bifurcations supercritiques*. Elle impose une variation monotone de l'amplitude A en fonction du paramètre R à partir de sa valeur critique R_*, que la théorie linéaire permet de calculer. Dans le cas d'une couche fluide chauffée par-dessous et limitée par deux parois planes, la valeur critique du nombre de Rayleigh est 1708. Cette variation $A(R)$ est représentée par la trajectoire en tirets sur la figure 1(a). Dans la théorie des systèmes dynamiques, le modèle standard des bifurcations supercritiques est la *bifurcation de Hopf,* que nous ne décrirons pas ici.

La seconde transition (fig. 1(b)) correspond plutôt au cas de l'écoulement de Poiseuille dans une conduite circulaire. Si l'amplitude initiale est infinitésimale, la transition peut encore se produire si la valeur de R dépasse la valeur critique R_*. Mais, pour toute excitation d'amplitude finie, la transition s'effectue pour une valeur plus faible, située entre un minimum R_{min} et R_*. Cette bifurcation est dite *sous-critique*. Ses caractéristiques principales sont les suivantes.

Lorsque la valeur de R dépasse $R_{\min}$, la valeur initialement stationnaire et finie de l'amplitude saute soudainement de zéro à une valeur plus grande, au-delà de laquelle elle continue de croître si R augmente encore. Et si R diminue à partir de valeurs élevées supérieures à R_*, l'amplitude de la perturbation diminue jusqu'à ce que la limite $R_{\min}$ soit atteinte, et elle revient alors à zéro par un nouveau saut. Cette trajectoire est donc marquée par un phénomène d'hystérésis caractérisé par la boucle fermée de la figure 1(b). Dans l'exemple de l'écoulement de Poiseuille, les valeurs de $R_{\min}$ et de R_* sont très différentes l'une de l'autre : $R_{\min} \approx 2400$, $R_* \approx 10^5$.

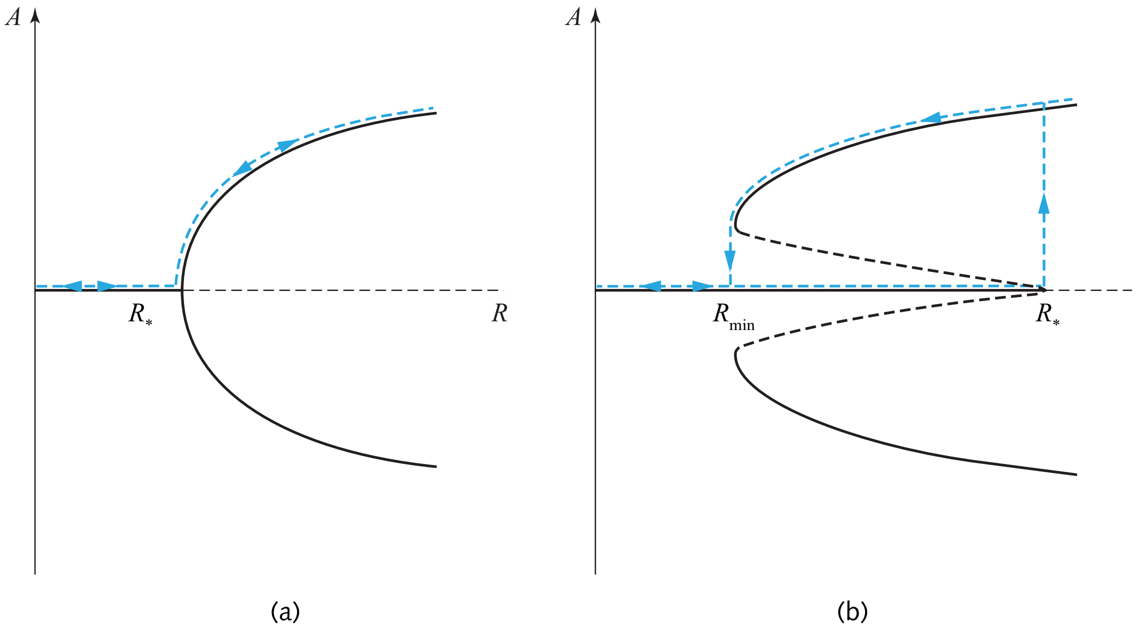

Figure 1. Diagrammes de bifurcations typiques : (a) bifurcation supercritique caractérisée par une trajectoire sans saut ni hystérésis, (b) bifurcation sous-critique caractérisée par une trajectoire avec saut et hystérésis.

2. La théorie de Landau

En 1944, Landau imaginait que la turbulence était le résultat d'une suite infinie de transitions, analogues à celles évoquées dans la section précédente, qui faisaient naître chacune l'un des degrés de liberté du mouvement turbulent. Cette vision d'une route unique vers la turbulence a été contredite par l'expérience et est maintenant abandonnée. Toutefois, au voisinage des premières transitions, elle a reçu une confirmation suffisante et demeure peut-être l'une des introductions les plus simples à la question des méthodes non-linéaires pour analyser la déstabilisation d'un écoulement.

Landau propose de décrire l'instabilité par l'équation non-linéaire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A|^2 = 2\sigma|A|^2 - l|A|^4, \tag{1}$$

où $|A|$ représente la valeur absolue de l'amplitude de la perturbation, σ son taux d'amplification et l un coefficient appelé *constante de Landau*. Il est clair que, si $\sigma > 0$, l'amplitude peut croître à partir d'une valeur initiale A_0, et qu'une saturation apparaît lorsque $|A| \to A_1 = \sqrt{\dfrac{2\sigma}{l}}$. Cette équation peut donc représenter le développement d'une instabilité, d'une façon très générique. Dans la mesure où l'on saurait relier les coefficients σ et l aux paramètres d'un écoulement donné, elle pourrait correspondre à ce cas particulier. En posant $X = |A|^{-2}$, l'équation (1) se simplifie sous la forme $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}+2\sigma X=l$, dont la solution est élémentaire : $X=X_0\exp(-2\sigma t)+\frac{l}{2\sigma}\big(1-\exp(-2\sigma t)\big)$. On en déduit la solution de l'équation (1) :

$$|A|^2=A_0^2\left[\frac{l}{2\sigma}A_0^2\big(1-\exp(-2\sigma t)\big)+\exp(-2\sigma t)\right]^{-1}. \qquad (2)$$

Envisageons d'abord le cas où $l>0$ et où $\sigma>0$. Pour des temps courts ($2\sigma t<<1$), cette solution montre que l'accroissement est de la forme $|A|=A_0\exp(-\sigma t)$. Pour des temps longs ($t\to\infty$), l'amplitude tend vers une limite asymptotique $A_1=\sqrt{\frac{2\sigma}{l}}$ totalement indépendante de la valeur initiale A_0, laquelle peut donc être aussi petite que l'on veut. L'évolution de $|A|$ en fonction du temps, selon que la valeur initiale A_0 est supérieure ou inférieure à la limite asymptotique A_1, est montrée sur la figure 2(a).

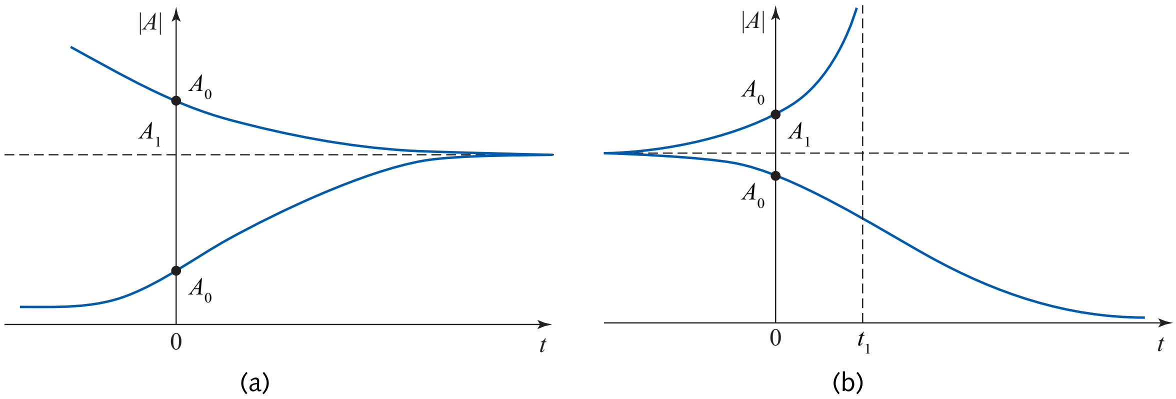

Figure 2. Evolutions temporelles de l'amplitude d'une perturbation satisfaisant à l'équation de Landau (1) : (a) dans le cas d'une bifurcation supercritique où $l > 0$, $\sigma > 0$, (b) dans le cas d'une bifurcation sous-critique où $l < 0$, $\sigma < 0$.

Il apparaît bien que cette solution conduit à un nouvel état stationnaire, en accord avec la figure 1(a). Elle représente effectivement une bifurcation supercritique et suggère que $\sigma\approx R-R_*$.

Envisageons maintenant le cas où $l<0$ et $\sigma<0$. Dans l'équation (1) c'est alors le terme non-linéaire en $|A|^4$ qui est amplificateur, alors que le terme linéaire est amortisseur. Dans de telles conditions, suivant que A_0 est supérieur ou inférieur à la valeur limite $A_1=\sqrt{\frac{2\sigma}{l}}$, l'amplitude va croître vers l'infini ou décroître vers zéro, comme indiqué sur la figure 2(b). On pourra vérifier que le temps t_1, tel que l'amplitude puisse devenir infinie, est fini et vaut $t_1=-\frac{1}{2\sigma}\ln\left[\frac{A_0^{\ 2}}{A_0^{\ 2}-A_1^{\ 2}}\right]$. Cette transition peut illustrer le cas d'une bifurcation sous-critique, à condition d'imaginer que des termes d'ordre supérieur, proportionnels à $|A|^4$ par exemple, soient introduits dans l'équation (1) et limitent à des valeurs finies la croissance de $|A|$.

3. Scénarios typiques de transitions vers le chaos

C'est certainement l'expérience qui, en complément à des analyses mathématiques de systèmes dynamiques, ainsi qu'à des simulations numériques, fournit l'un des moyens les plus sûrs de repérer ces scénarios. Il faut toutefois disposer de capteurs assez sensibles pour permettre d'effectuer une analyse spectrale des fluctuations d'une grandeur caractéristique, comme la vitesse ou la température. La variété des scénarii observés est tellement grande que l'on ne saurait les décrire tous, ni *a fortiori* les représenter dans ce texte. Limitons-nous donc à résumer les caractéristiques de certains de ceux qui ont été clairement mis en évidence et qui constituent de vrais prototypes.

Un premier scénario de transition vers le chaos fait d'abord apparaître deux premières bifurcations, marquées chacune par un seuil, disons R_1 et R_2, ainsi que par une fréquence bien caractéristique, disons f_1 et f_2, celles-ci étant incommensurables. Puis, alors que, suivant les idées de Landau, on pourrait s'attendre à une suite de bifurcations analogues, soudainement, pour une valeur $R_3 > R_2 > R_1$ du paramètre de contrôle, une composante continue apparaît sur le spectre en fréquence. Autrement dit, une partie de l'énergie des fluctuations échappe aux modes de fréquences f_1, f_2 et à leurs harmoniques, pour se distribuer sur toutes les fréquences possibles. Si l'on augmente encore le paramètre de contrôle, la fraction de l'énergie continûment distribuée sur toute l'étendue du spectre continue de croître, alors que celle concentrée sur les fréquences f_1 et f_2 décroît rapidement. Il apparaît ainsi que le passage au chaos survient en lieu et place du troisième degré de liberté du phénomène. Cette route vers le chaos peut notamment être observée dans l'instabilité de Rayleigh-Bénard pour des fluides comme l'air et l'eau, qui conduisent assez mal la chaleur (leur nombre de Prandtl est de l'ordre de l'unité ou plus grand).

Un second scénario fut clairement mis en évidence dans des expériences sur l'instabilité d'une couche de mercure, fluide à petit nombre de Prandtl, qui transporte beaucoup mieux la chaleur que la quantité de mouvement, chauffée par-dessous. Il se manifeste par l'apparition successive de doublements de périodes. Après le mode principal de période $\frac{2\pi}{f_1}$, qui apparaît lorsque $R = R_1$, pour des valeurs supérieures du paramètre de contrôle, R_2, R_3, R_4, apparaissent successivement les modes de périodes $\frac{2\pi}{f_1}, \frac{8\pi}{f_1}, \frac{16\pi}{f_1}, \ldots$ Les écarts entre les seuils successifs $R_2 - R_1$, $R_3 - R_2$, $R_4 - R_3$, deviennent de plus en plus petits, jusqu'à une limite finie R_* au-delà de laquelle le chaos s'installe. La suite des seuils R_n possède en effet la propriété remarquable suivante, indépendamment du système oscillant considéré :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_{n+1} - R_n}{R_{n+2} - R_{n+1}} \approx 4{,}67. \tag{3}$$

Enfin, un troisième scénario qui mérite d'être mentionné dans ce paragraphe est celui qui caractérise l'écoulement de Poiseuille en conduite circulaire. Il se manifeste par des apparitions de bouffées intermittentes. Pour des valeurs modérées du paramètre de contrôle, en l'occurrence le nombre de Reynolds, au-dessus d'un premier seuil R_1, ces bouffées sont assez éloignées les unes des autres. Elles se rapprochent lorsque la valeur de ce paramètre augmente. Et à partir d'un second seuil R_2, elles conduisent à l'apparition de la turbulence qui envahit tout le domaine fluide. Cette route vers la turbulence semble assez typique des systèmes où la première bifurcation est sous-critique (voir fig. 1(b)).