

Statique des fluides

1. Distribution hydrostatique de la pression

Les fluides au repos sont soumis à la fois à des forces de volume et à des forces de surface. L'expression des premières dépend des propriétés spécifiques du champ de force auquel le fluide est soumis. Celle des secondes est particulièrement simple lorsque le fluide est au repos, puisqu'alors, sur toute surface que l'on imagine par la pensée, il ne peut exister aucun frottement tangentiel, sinon le fluide serait mis en mouvement par le cisaillement associé.

Examinons le domaine fluide D , limité par une surface fermée S , représenté sur la figure 1.

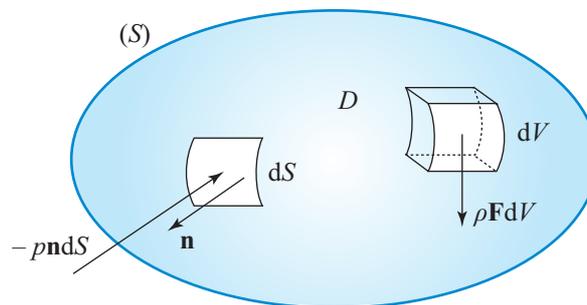


Figure 1. Force extérieure $\rho \mathbf{F} dV$ sur l'élément de volume dV , dont la somme sur le domaine D s'écrit $\int_D \rho \mathbf{F} dV$, et force extérieure $-p \mathbf{n} dS$ sur l'élément de surface dS de normale unitaire dirigée vers l'extérieur \mathbf{n} , dont la somme sur toute la surface fermée S s'écrit $-\oint_S p \mathbf{n} dS$.

En tout point de S , la pression p du fluide extérieur exerce sur un élément de surface infinitésimal d'aire dS la force $-p \mathbf{n} dS$, \mathbf{n} désignant la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de S . La somme de ces forces sur toute la surface S s'écrit : $-\oint_S p \mathbf{n} dS$.

Par ailleurs, si l'on note \mathbf{F} la force exercée de l'extérieur sur chaque unité de masse, celle exercée sur chaque volume élémentaire dV s'écrit $\rho \mathbf{F} dV$ où ρ est la masse volumique, et celle exercée sur l'ensemble du domaine D s'écrit $\int_D \rho \mathbf{F} dV$.

L'équilibre de ces forces de volume et de surface conduit alors à l'équation

$$\int_D \rho \mathbf{F} dV - \oint_S p \mathbf{n} dS = 0. \quad (1)$$

Le théorème de la divergence permet de ramener l'intégrale de surface à une intégrale de volume et de mettre cette équation sous la forme

$$\int_D (\rho \mathbf{F} - \nabla p) dV. \quad (2)$$

Pour que cette équation (2) soit satisfaite quel que soit le domaine D , il faut que l'intégrant soit nul en tout point, ce qui conduit à l'équation locale :

$$\nabla p = \rho \mathbf{F} \quad (3)$$

Le cas le plus simple et le plus fréquent est celui d'un fluide soumis au seul champ de pesanteur ; dans ce cas, en tout point, la force par unité de masse s'écrit

$$\mathbf{F} = \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad (4)$$

où g désigne la gravité, dirigée dans le sens opposé à la verticale ascendante que l'on choisit comme axe Oz dans un repère cartésien (Ox, Oy, Oz) . Dans l'atmosphère comme dans l'eau des océans, les variations de g sont tellement faibles que cette grandeur peut être supposée invariante ($g \approx 9,81 \text{ m.s}^{-2}$). Alors, la seule composante non nulle de ∇p est sa projection dans la direction Oz . Si, de plus, aux échelles considérées, la masse volumique du fluide peut être supposée invariante, l'équation s'intègre immédiatement, conduisant au résultat suivant :

$$p + \rho g z = \text{Cste} \quad (5)$$

Cette équation implique que toute surface isobare soit un plan horizontal. Par ailleurs, en prenant le rotationnel de l'équation (3), on obtient aussi $\nabla \rho \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, qui montre que les surfaces d'égale densité doivent être orthogonales au champ des forces de volume, c'est-à-dire horizontales dans le cas du champ de pesanteur. Cette équation (5) permet de retrouver des propriétés énoncées au Chapitre 1 du livre, à savoir que la pression normale au niveau de la mer correspond approximativement au poids d'une colonne d'eau de 10 m exercé par unité de surface, à celui d'une colonne de mercure de 76 cm, ou encore au poids d'une colonne d'air de 8 à 10 km.

L'autre cas important dans l'air et dans l'eau sur la Terre est celui d'un fluide tournant en bloc autour de l'axe Oz avec la vitesse angulaire ω , où la force extérieure par unité de masse se compose de la pesanteur et de la force centrifuge. Cette force s'écrit

$$\mathbf{F} = \mathbf{g} + \omega^2 \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \omega^2 x \\ \omega^2 y \\ -g \end{pmatrix} \quad (6)$$

en désignant par $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ le vecteur radial horizontal allant de l'axe au point considéré. L'équation de l'hydrostatique devient alors :

$$p + \rho g z - \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} = \text{Cste}. \quad (7)$$

Elle montre notamment que les surfaces isobares et les surfaces d'égale densité deviennent des paraboloides de révolution d'équation :

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + \text{Cste}. \quad (8)$$

2. Application au calcul des poussées

Limitons-nous au cas des surfaces planes de certaines vannes, ou de certains barrages, en contact avec de l'eau sur l'une de leurs faces et avec de l'air sur l'autre. Dans l'hypothèse où ces deux fluides sont au repos, cherchons à calculer la poussée supplémentaire exercée par l'eau sur la face mouillée. Considérons la paroi AB , et désignons par \mathbf{n} la normale unitaire dirigée vers le côté sec, comme représenté sur la figure 2.

Si l'on néglige la masse volumique de l'air par comparaison avec celle de l'eau, notée ρ , la force de pression qui s'exerce sur la face sèche de tout élément de paroi dS s'écrit $d\mathbf{F}_1 = -p_a \mathbf{n} dS$ et est dirigée vers le côté mouillé, avec p_a la pression atmosphérique. La force de pression qui s'exerce sur sa face mouillée s'écrit, elle, $d\mathbf{F}_2 = (p_a + \rho g h) \mathbf{n} dS$, où h désigne la profondeur de dS au-dessous

de la surface libre. Elle est dirigée vers le côté sec. Le bilan net de ces deux forces qui s'opposent se ramène donc à la poussée locale $\rho gh dS$ qui s'exerce suivant la normale à la paroi dirigée vers l'extérieur du bassin.

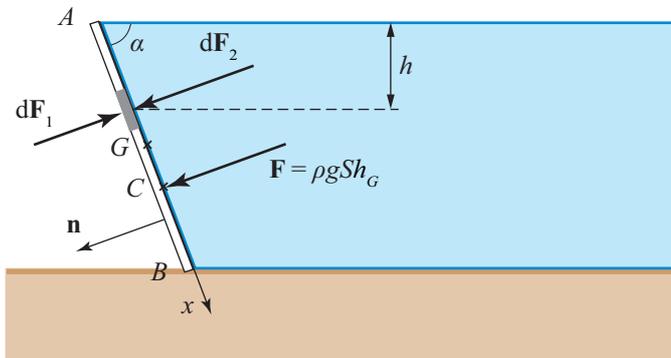


Figure 2. Poussée sur une paroi plane inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale, et position du centre de poussée C au-dessous du centre de gravité G de la surface.

La somme des poussées élémentaires $d\mathbf{F}_1$ et $d\mathbf{F}_2$, colinéaires à la normale \mathbf{n} , conduit à une résultante, elle aussi dirigée suivant la normale, dont la valeur est donnée par les égalités suivantes

$$|\mathbf{F}| = \int_S \rho gh dS = \rho g S h_G. \quad (9)$$

La dernière d'entre elles est obtenue en supposant que ρ et g sont constants et en utilisant la propriété classique du centre de gravité G d'une surface plane d'aire S , dont les coordonnées (x_G, y_G, z_G) et la profondeur h_G sont telles que :

$$S(x_G, y_G, z_G, h_G) = \int_S (x, y, z, h) dS. \quad (10)$$

La position du point d'application C de cette résultante, appelé centre de poussée, est telle que, par rapport à tout axe, le moment de la poussée soit égal à la somme des moments des poussées élémentaires. On dit encore que la poussée appliquée au point C doit former un torseur équivalent au torseur des poussées élémentaires. En choisissant l'axe Ox le long de AB dans le plan de la figure 2, on a donc :

$$|\mathbf{F}| x_C = \int_S \rho gh x dS. \quad (11)$$

Si la paroi est exactement rectangulaire et inclinée d'un angle α , comme sur la figure 2, on a encore $h = x \sin \alpha$ de sorte que l'abscisse du centre de poussée est finalement donnée par

$$x_C = \frac{\int_S x^2 dS}{S x_G} = \frac{I_A}{S x_G}, \quad (12)$$

où, dans la dernière égalité, on reconnaît le moment d'inertie $I_A = \int_S x^2 dS$ de la surface S par rapport à l'axe perpendiculaire au plan de la figure 2 et passant par le point A . On vérifiera que, dans le cas d'une paroi rectangulaire verticale de hauteur H , dont le centre de gravité est situé à la profondeur $H/2$, le centre de poussée est situé à la profondeur $2H/3$.

3. Stabilité d'un barrage poids

Considérons le barrage poids schématisé sur la figure 3 (cf. Chapitre 8, §1 du livre).

Admettons que le niveau de l'eau dans la retenue atteigne la hauteur maximale possible et arrive jusqu'au sommet A . La poussée de l'eau \mathbf{P} est perpendiculaire au parement amont AB et appliquée

au point C . Par ailleurs, le poids du barrage lui-même, dénoté π , dirigé dans le sens de la verticale descendante, est appliqué au centre de gravité du barrage (G). La stabilité de cet ouvrage requiert que le moment de la poussée \mathbf{P} par rapport à tout axe horizontal soit toujours compensé par le moment du poids π .

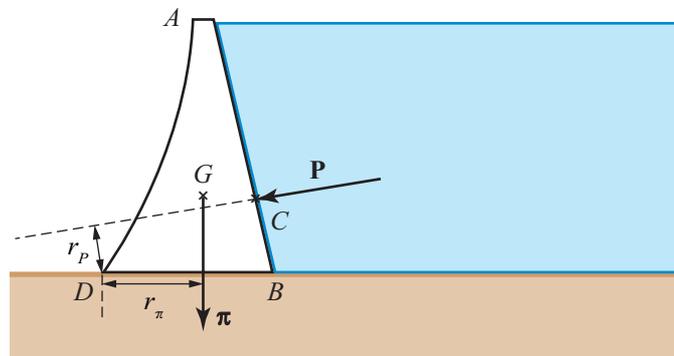


Figure 3. Illustration de la condition de stabilité d'un barrage poids, soumis à son poids π appliqué en son centre de gravité G et à la poussée de l'eau \mathbf{P} sur son parement amont, appliquée au centre de poussée C . La réaction du sol sur le barrage n'est pas représentée.

L'axe le plus dangereux est celui qui passe par le point D , opposé au point B à la base du barrage, puisque le moment de poussée \mathbf{P} , qui s'écrit $+|\mathbf{P}|r_p$, peut avoir le signe d'un basculement sans être compensé par la réaction du sol. La condition de stabilité exige donc que le moment du poids π par rapport à l'axe passant par D , à savoir $-|\pi|r_\pi$ toujours dans le sens d'un redressement, soit suffisant pour compenser l'éventuel moment de basculement de la poussée. Il apparaît qu'il existe une pente limite du parement amont, au-dessus de laquelle le bras de levier r_p devient négatif. Dans ce cas, qui correspond aux pentes faibles, la poussée de l'eau ne risque en aucun cas de faire basculer le barrage.

4. Statique des fluides compressibles, application à l'atmosphère

Dans l'air, dont la densité est environ 800 fois plus faible que celle de l'eau, à des échelles modérées comme celles du laboratoire ou d'une cheminée, il est souvent justifié de ramener la loi de l'hydrostatique à la forme simple : $p_a = Cste$. En pratique, le seul domaine gazeux où il est nécessaire de ne pas négliger les variations de pressions qui compensent le poids des colonnes d'air est l'atmosphère, où les très grandes différences d'altitude peuvent compenser la petitesse de la masse volumique. L'équation de l'hydrostatique s'écrit

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0 \quad (13)$$

mais, ρ ne pouvant pas être supposé constant, alors que c'est encore légitime pour g , cette équation à elle seule ne suffit pas pour déterminer à la fois p et ρ . On peut lui associer l'équation d'état des gaz parfaits

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R}{M} T \quad (14)$$

où R désigne la constante universelle des gaz parfaits ($R \approx 8,32 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$) et M la masse molaire moyenne de l'air ($M \approx 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$). Mais, à son tour, cette deuxième équation introduit une nouvelle inconnue, la température T . En toute rigueur, pour fermer le système, il faudrait donc disposer d'une troisième équation qui modélise la thermique de l'atmosphère. Ceci s'avère délicat, voire incompatible avec l'hypothèse d'une atmosphère au repos, puisque cette thermique est dominée par la convection.

Ce manque d'une troisième équation et le besoin d'un modèle simple pour l'atmosphère au repos conduit à utiliser une hypothèse. La plus simple consiste à supposer l'**atmosphère isotherme**. Alors, en notant p_0 , ρ_0 et T_0 les pression, masse volumique et température à l'altitude zéro, celle du niveau moyen des mers, on aboutit aux deux équations

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 g \frac{p}{p_0} = 0, \quad (15)$$

qui se ramènent à l'équation différentielle ordinaire $\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} dz$ et au résultat simple :

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = \exp\left(-\frac{\rho_0 g z}{p_0}\right). \quad (16)$$

Cette première hypothèse a déjà une certaine pertinence puisqu'elle aboutit à la distribution exponentielle évoquée dans le Chapitre 1 du livre. A titre d'exemple de ses conséquences intéressantes, retenons qu'elle conduit à une estimation de l'épaisseur typique de l'atmosphère $p_0 / \rho_0 g \approx 8000$ m, assez proche de celle de la troposphère.

Une autre hypothèse, pas plus réaliste que la précédente, consiste à supposer l'**atmosphère adiabatique**, en utilisant, au lieu de l'équation d'état la relation caractéristique des transformations adiabatiques, c'est-à-dire des systèmes qui n'échangent aucune chaleur avec l'extérieur : $\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}$,

où $\gamma = \frac{C_p}{C_v} \approx \frac{7}{5}$ est le rapport des capacités calorifiques à pression et volume constants. L'équation différentielle à laquelle aboutit ce nouveau système a pour solution :

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_0 g z}{p_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_0 g z}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \quad \frac{T}{T_0} = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_0 g z}{p_0}\right). \quad (17)$$

Ce second modèle n'est pas très erroné aux altitudes modérées, mais il s'écarte beaucoup de la réalité aux hautes altitudes en conduisant à une épaisseur finie pour l'atmosphère, au-dessus de laquelle on trouverait un vide total : $z_{\text{lim}} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0 g} \approx 28\,000$ m.

Une troisième hypothèse consiste à utiliser la **distribution de température de l'atmosphère standard** : $T = T_0 - az$, avec $a = 6,5 \text{ K.m}^{-1}$. Alors, l'équation d'état (14) devient $p / \rho = R / M(T_0 - az)$. Elle permet d'éliminer ρ dans l'équation de l'hydrostatique (13) et conduit à l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{R} \frac{dz}{T_0 - az}. \quad (18)$$

La solution est :

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{Ra}}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{Ra} - 1}. \quad (19)$$

Elle prédit encore une altitude limite $z_{\text{lim}} \approx 44\,000$ m, au-delà de laquelle on trouverait un vide absolu, mais demeure tout à fait correcte dans la troposphère ($z_{\text{max}} \approx 8$ à 15 km suivant la latitude).