TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 5

CHAPITRE 1. **Espaces de Hilbert** 7

1. Définition. Propriétés immédiates 7
2. Exemples d'espaces de Hilbert 8
3. Topologies forte et faible sur un espace de Hilbert 9
4. Orthogonalité. Bases 9
5. Théorème de la projection. Applications 11
   5.1 Projection sur un convexe fermé 11
   5.2 Projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie 11
   5.3 Projection sur un sous-espace vectoriel de codimension finie 12
   5.4 Problèmes de minimisation en dualité 12
   5.5 Séries de Fourier 13
6. Opérations sur les espaces de Hilbert 14
   6.1 Somme directe hilbertienne finie 14
   6.2 Espace de Hilbert quotient 14
   6.3 Espace de Hilbert image 15
   6.4 Somme de deux espaces de Hilbert 15
   6.5 Produit d'un espace de Hilbert par un scalaire strictement positif 16

EXERCICES 16

CHAPITRE 2. **Les espaces** $\mathcal{H}^m(a,b)$, $\mathcal{H}_0^m(a,b)$ 21

1. L'espace $L^2(a,b)$ 21
2. Dérivée généralisée 22
3. L' espace $\mathcal{H}^m(a,b)$ 22
   3.1 Définition de l'espace $\mathcal{H}^m(a,b)$ 22
   3.2 Structure hilbertienne de $\mathcal{H}^m(a,b)$ 23
   3.3 Exemple fondamental 25
   3.4 L'espace de Sobolev $H^m(a,b)$ 28
4. L' espace $\mathcal{H}_0^m(a,b)$ 29

EXERCICES 30

CHAPITRE 3. **Noyaux hilbertiens (reproduisants).**
Représentation hilbertienne de la fonctionnelle de Dirac 37

1. Introduction. La notion de fonctionnelle 37

2. Dual topologique d'un espace de Hilbert 39

3. Sous-espaces hilbertiens de $\mathbb{R}^\Omega$ et noyaux associés 40

4. Exemples de noyaux hilbertiens 42

5. Noyau de $\left(\mathcal{H}^m(a,b), < \cdot | \cdot >_{m,U}\right)$ 45

5.1 Explicitation du noyau de $\left(\mathcal{H}_1, < \cdot | \cdot >_{m,U}\right)$ 46

5.2 Explicitation du noyau de $\left(\mathcal{H}_2, < \cdot | \cdot >_{m,U}\right)$
dans un cas particulier important 46

5.3 Relation entre le noyau de $\left(\mathcal{H}_2, < \cdot | \cdot >_{m,U}\right)$ et le noyau de $\left(\mathcal{H}_2, < \cdot | \cdot >_{m,V}\right)$ 50

5.4 Explicitation du noyau de $\left(\mathcal{H}_2, < \cdot | \cdot >_{m,U}\right)$. Cas général 52

6. Isomorphisme de structure entre Hilb($\mathbb{R}^\Omega$) et $\mathbb{R}_+^{\Omega\times\Omega}$ 53

6.1 L'ensemble $\mathbb{R}_+^{\Omega\times\Omega}$ 53

6.2 Exemples 54

7. Complément à la théorie des noyaux hilbertiens 58

7.1 Noyau de Schwartz d'un espace hilbertien 59

7.2 Opérations sur les noyaux hilbertiens 61

EXERCICES 62

CHAPITRE 4. **Fonctions splines polynomiales** 71

1. Introduction 71

2. Spline polynomiale minimisante d'interpolation 73

2.1 Existence de la solution du problème (Π_3) 73

2.2 Caractérisation de la spline polynomiale minimisante d'interpolation 74

2.3 Explicitation de la spline polynomiale minimisante d'interpolation 75

3. Propriétés fondamentales de la spline polynomiale minimisante d'interpolation.
Problème dual 76

3.1 Propriétés de la spline polynomiale minimisante d'interpolation 76

3.2 Problème dual du problème (Π_3) 78

4. Généralisation des fonctions splines polynomiales minimisantes 80

5. B-splines 81

5.1 Les opérateurs E_h et D_h 81

5.2 L'espace $D_h^m\mathcal{H}^m(\mathbb{R})$ 82

5.3 Le noyau hilbertien de l'espace $D_h^m\mathcal{H}^m(\mathbb{R})$ 84

5.4 La fonction Q_h^m 90

5.5 B-spline normalisée 91

5.6 B-spline normalisée de référence 92

6. Les espaces $S^m_{n,h}$ et S^m_h 93

EXERCICES 97

CHAPITRE 5. **Ondelettes** 103

Première partie : Notions fondamentales sur les ondelettes

1. Sur l'approximation d'un signal périodique 103
   1.1 Développement en séries de Fourier 103
   1.2 Transformée de Fourier 104
2. Transformée de Fourier à "fenêtre glissante". Ondelettes 106
   2.1 Introduction 106
   2.2 La "fenêtre glissante" 106
   2.3 Ondelettes 107
3. Ondelettes continues et noyaux hilbertiens associés 108
4. Ondelettes discrètes. Analyse multirésolution 112
   4.1 Introduction 112
   4.2 Analyse multirésolution 113
   4.3 Construction d'une ondelette discrète à partir d'une A.M. de $L^2(\mathbb{R})$ 114

Deuxième partie : Ondelettes splines

5. Ondelettes, quasi-ondelettes associées au noyau $K_{m,h}$ 119
   5.1 Rappels 119
   5.2 Quelques propriétés supplémentaires du noyau $K_{m,h}$ 120
   5.3 Analyse multirésolution associée au noyau $K_{m,h}$ 121
   5.4 Quasi-ondelettes associées au noyau $K_{m,h}$ 126
6. Sur les ondelettes biorthogonales 128
7. Sur les ondelettes à support compact minimal 129
   7.1 Fonction de Green discrète 130
   7.2 La fonction spline polynomiale minimisante $\sigma_{q,h}$ 131
   7.3 Fonction d'échelle à support compact minimal 133
   7.4 Ondelette à support compact minimal 134

EXERCICES 134

CHAPITRE 6. **Structures hilbertiennes et approximation de type fractal** 137

1. Structures de type fractal 137
   1.1 Fractales. Applications de type fractal 137
   1.2 Espaces de Hilbert et noyaux hilbertiens de type fractal 139
2. Dessin de courbes et de surfaces de type fractal 143

3. Interpolation par des fonctions splines de type fractal 144

4. Ordre d'approximation de fractales par des splines de type fractal 145

5. Problème variationnel de type fractal. Opérateur différentiel et fonction de Green de type fractal 147

5.1 Problème variationnel de type fractal 147

5.2 Fonction de Green de type fractal 148

EXERCICES 149

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES 153