

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Table des matières</b> .....	I
<b>Comment utiliser cet ouvrage pap-ebook</b> .....	1
<b>Introduction</b> .....	3
<b>Notations</b> .....	7
<b>Chapitre 1. Calcul différentiel</b> .....	9
1.1. Introduction .....	9
1.1.1. Qu'est-ce que le calcul différentiel ? .....	9
1.1.2. Résumé .....	11
1.2. Différentielles .....	12
1.2.1. Définition et propriétés de base .....	12
1.2.2. Trois exemples fondamentaux .....	15
1.2.3. Fonctions de classe $C^p$ .....	17
1.3. Théorème des fonctions composées .....	18
1.4. Inversion locale .....	21
1.4.1. Difféomorphismes .....	21
1.4.2. Difféomorphismes locaux .....	23
1.4.3. Immersions, submersions .....	24
1.5. Sous-variétés .....	27
1.5.1. Propriétés de base .....	27
1.5.2. Exemples : sphères, tores, groupe orthogonal .....	30
1.5.3. Paramétrisations .....	31
1.5.4. Vecteurs tangents, espace tangent .....	32
1.6. Sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire .....	35
1.7. Points critiques .....	38
1.8. Valeurs critiques .....	41

1.9. Calcul différentiel en dimension infinie .....	43
1.10. Commentaires .....	45
1.11. Exercices .....	47
<b>Chapitre 2. Notions de base sur les variétés .....</b>	<b>53</b>
2.1. Introduction .....	53
2.1.1. Un exemple typique : les droites du plan .....	53
2.1.2. Résumé .....	54
2.2. Cartes, atlas .....	55
2.2.1. Des variétés topologiques aux variétés lisses .....	55
2.2.2. Premiers exemples .....	58
2.3. Fonctions différentiables ; difféomorphismes .....	59
2.4. Le théorème de d'Alembert .....	63
2.5. Les espaces projectifs .....	64
2.6. L'espace vectoriel tangent ; applications .....	69
2.6.1. Espace tangent, application linéaire tangente .....	69
2.6.2. Difféomorphismes locaux, immersions, submersions, sous-variétés .....	71
2.7. Revêtements .....	75
2.7.1. Quotient d'une variété par un groupe .....	75
2.7.2. Simple connexité .....	82
2.8. Dénombrabilité à l'infini .....	84
2.9. Commentaires .....	86
2.10. Exercices .....	88
<b>Chapitre 3. Du local au global .....</b>	<b>97</b>
3.1. Introduction .....	97
3.2. Fonctions plateau ; plongements de variétés .....	98
3.3. Dérivations .....	103
3.3.1. Dérivations ponctuelles .....	103
3.3.2. Un autre point de vue sur l'espace tangent .....	105
3.3.3. Dérivations globales .....	107
3.4. Image d'un champ de vecteurs ; crochet .....	109
3.5. Le fibré tangent .....	111

3.5.1. La variété des vecteurs tangents .....	111
3.5.2. Fibrés vectoriels .....	113
3.5.3. Champs de vecteurs sur les variétés ; hessien .....	115
3.6. Le flot d'un champ de vecteurs .....	117
3.7. Champs de vecteurs dépendant du temps .....	125
3.8. Variétés de dimension un .....	128
3.9. Commentaires .....	130
3.10. Exercices .....	134
<b>Chapitre 4. Autour des groupes de Lie .....</b>	<b>143</b>
4.1. Introduction .....	143
4.2. Champs invariants à gauche .....	144
4.3. L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie .....	149
4.3.1. Propriétés de base ; représentation adjointe .....	149
4.3.2. Des groupes aux algèbres .....	152
4.3.3. Des algèbres aux groupes .....	153
4.4. Digression sur les groupes topologiques .....	156
4.5. Groupes de Lie commutatifs .....	162
4.5.1. Un théorème de structure .....	162
4.5.2. Courbes elliptiques .....	164
4.6. Espaces homogènes .....	165
4.7. Commentaires .....	169
4.8. Exercices .....	171
<b>Chapitre 5. Formes différentielles .....</b>	<b>177</b>
5.1. Introduction .....	177
5.1.1. Des formes différentielles, pourquoi? .....	177
5.1.2. Résumé .....	178
5.2. Algèbre multilinéaire .....	179
5.2.1. Algèbre tensorielle .....	179
5.2.2. Algèbre extérieure .....	181
5.2.3. Application : la grassmannienne des 2-plans en dimension .....	185
5.3. Cas des ouverts d'un espace numérique .....	186

5.3.1. Formes de degré 1	186
5.3.2. Formes de degré quelconque	188
5.4. Différentielle extérieure	190
5.5. Produit intérieur, dérivée de Lie	194
5.6. Le lemme de Poincaré	199
5.6.1. Ouverts étoilés	199
5.6.2. Formes dépendant d'un paramètre	202
5.7. Formes différentielles sur une variété	203
5.8. Équations de Maxwell	207
5.8.1. Espace de Minkowski	208
5.8.2. Le champ électro-magnétique vu comme une forme différentielle	208
5.8.3. Champ électromagnétique et groupe de Lorentz	209
5.9. Commentaires	211
5.10. Exercices	214
<b>Chapitre 6. Intégration et applications</b>	<b>223</b>
6.1. Introduction	223
6.2. Orientation : des espaces vectoriels aux variétés	225
6.2.1. Atlas d'orientation	225
6.2.2. Formes volume	226
6.2.3. Revêtement des orientations	230
6.3. Intégration sur les variétés ; une première application	231
6.3.1. Intégrale d'une forme différentielle de degré maximum	231
6.3.2. Le théorème de la boule chevelue	233
6.4. Théorème de Stokes	235
6.4.1. Intégration sur les parties compactes	235
6.4.2. Les domaines réguliers et leur bord	236
6.4.3. La formule de Stokes dans tous ses états	239
6.5. Forme volume canonique d'une sous-variété de l'espace euclidien	243
6.6. Le théorème de Brouwer	247
6.7. Commentaires	250
6.8. Exercices	251

<b>Chapitre 7. Cohomologie et théorie du degré</b> .....	257
7.1. Introduction .....	257
7.2. Espaces de de Rham .....	259
7.3. Cohomologie en degré maximum .....	260
7.4. Degré d'une application .....	264
7.4.1. Cas du cercle .....	264
7.4.2. Définition et propriétés de base dans le cas général .....	266
7.4.3. Invariance du degré par homotopie ; applications .....	268
7.4.4. Indice d'un champ de vecteurs .....	271
7.5. Retrouver sur le théorème de d'Alembert .....	273
7.5.1. Deux preuves du théorème de d'Alembert utilisant le degré .....	273
7.5.2. Comparaison des différentes preuves du théorème de d'Alembert .....	275
7.6. Enlacement .....	276
7.7. Invariance par homotopie .....	280
7.8. Le principe de Mayer–Vietoris .....	283
7.8.1. Suites exactes .....	283
7.8.2. La suite exacte de Mayer–Vietoris .....	285
7.8.3. Application : quelques calculs de cohomologie .....	287
7.8.4. Cas non compact .....	289
7.9. Méthodes intégrales .....	290
7.10. Commentaires .....	293
7.11. Exercices .....	294
<b>Chapitre 8. Caractéristique d'Euler–Poincaré et théorème de Gauss–Bonnet</b> .....	303
8.1. Introduction .....	303
8.1.1. D'Euclide à Carl–Friedrich Gauss et Pierre–Ossian Bonnet .....	303
8.1.2. Esquisse d'une preuve du théorème de Gauss–Bonnet .....	305
8.1.3. Résumé .....	305
8.2. Caractéristique d'Euler–Poincaré .....	306
8.2.1. Définition ; additivité .....	306
8.2.2. Pavages .....	307
8.3. Invitation à la géométrie riemannienne .....	310

8.4. Le théorème de Poincaré–Hopf .....	314
8.4.1. Retour sur l’indice d’un champ de vecteurs .....	314
8.4.2. Un théorème des résidus .....	315
8.5. De Poincaré–Hopf à Gauss–Bonnet .....	317
8.5.1. Avec le théorème de classification des surfaces .....	317
8.5.2. Avec les pavages : idée de la preuve .....	319
8.5.3. Mise en forme des arguments précédents .....	320
8.6. Commentaires .....	322
8.6.1. Cas des surfaces plongées .....	322
8.6.2. Métriques riemanniennes canoniques sur les surfaces .....	323
8.6.3. Indications sur les dimensions supérieures .....	323
8.7. Exercices .....	324
<b>Annexe</b> .....	<b>327</b>
<b>Solution d’exercices</b> .....	<b>329</b>
<b>Bibliographie</b> .....	<b>359</b>
<b>Index</b> .....	<b>367</b>