

Table des matières

Avant-propos	7
Chapitre 1 – Formulation lagrangienne.....	13
COURS 13	
1.1. Introduction	13
1.2. Coordonnées généralisées.....	15
1.3. Forces généralisées.....	22
1.3.1. Déplacements virtuels.....	23
1.3.2. Forces généralisées	25
Résumé – Équations de Lagrange : mode d’emploi	28
EXERCICES PROPOSÉS DANS LE COURS	28
E1.1. Permutation des dérivées	28
E1.2. Force de réaction de la perle	28
E1.3. Forces d’inertie généralisées.....	29
COMPLÉMENTS	30
C1.1. Rappels de cinématique	30
C1.1.1. Composition des vitesses	30
C1.1.2. Composition des accélérations	30
C1.1.3. Énergie cinétique d’un corps solide	31
C1.1.4. Roulement sans glissement.....	33
C1.2. Liaisons.....	34
C1.2.1. Multiplicateurs de Lagrange	34
C1.2.2. Degrés de liberté d’un système.....	37
C1.3. Commentaires.....	39
EXERCICES ET PROBLÈMES	39
E1.4. La fronde.....	39
E1.5. La corde glissant sur la table.....	40
E1.6. Cylindre roulant sur un plateau mobile	40
E1.7. Masse glissant sur un coin glissant.....	41
E1.8. Le cric	41
E1.9. Principe de d’Alembert et poussée d’Archimède.....	42
E1.10. Une porte de garage astucieuse.....	43
P1.11. Une expérience pour mesurer la vitesse de rotation de la Terre.....	44
P1.12. L’indicateur de virage	44
P1.13. Le pendule de Huygens.....	46
P1.14. Essieu libre sur un plan incliné (liaisons non holonômes).....	47

INDICATIONS ET RÉPONSES	48
E1.4. La fronde	48
E1.5. La corde glissant sur la table	48
E1.6. Cylindre roulant sur un plateau mobile	49
E1.7. Masse glissant sur un coin	49
E1.8. Le cric	49
E1.9. Poussée d'Archimède	49
E1.10. Porte de garage astucieuse	49
P1.11. Expérience de Compton	49
P1.12. Indicateur de virage	50
P1.13. Pendule de Huygens	50
P1.14. Essieu libre sur un plan incliné	50
 Chapitre 2 – Systèmes lagrangiens	53
COURS	53
2.1. Introduction	53
2.2. Fonction de Lagrange	54
2.3. Intégrales premières	57
2.3.1. Coordonnée cyclique	57
2.3.2. Translation continue du temps	58
2.3.3. Translation continue d'espace	60
2.3.4. Invariance par rotation continue d'espace	61
2.3.5. Conclusion sur les intégrales premières	62
2.4. Systèmes à deux corps	62
2.4.1. Formulation	62
2.4.2. Invariance par translation du temps	63
2.4.3. Invariance par translation d'espace	63
2.4.4. Invariance par rotation	65
2.4.5. Description complète du mouvement par quadrature	67
2.5. Équilibre et petites oscillations	69
2.5.1. Rappels pour les systèmes à une dimension	70
2.5.2. Cas de deux coordonnées	72
Résumé – Fonction de Lagrange	76
 EXERCICES PROPOSES DANS LE COURS	76
E2.1. Changement de lagrangien	76
E2.2. Intégrale première provenant de la translation dans le temps	77
E2.3. Théorème d'Euler	77
E2.4. Le cerceau à vitesse angulaire constante	78
 COMPLEMENTS	79
C2.1. Particule dans un champ électromagnétique	79
C2.1.1. Potentiel généralisé et force de Lorentz	79
C2.1.2. Arbitraire du lagrangien et invariance de jauge	80
C2.2. Passage au continu	80

C2.2.1. Corde vibrante	80
C2.2.2. Chaîne de pendules	82
C2.3. Traitement général des petites oscillations.....	83
C2.4. Le théorème de Noether.....	88
C2.5. Lien entre impulsion individuelle et moment angulaire total associé aux rotations	86
C2.6. Fonction de dissipation	88
C2.7. Le problème de Kepler.....	89
 EXERCICES ET PROBLEMES	92
E2.5. Disque sur un coin en mouvement.....	92
E2.6. Constance du moment cinétique	92
E2.7. Mouvement cyclotron	93
E2.8. Intégrale de Painlevé (1)	93
E2.9. Intégrale de Painlevé (2)	94
E2.10. Lagrangien dans un référentiel tournant.....	94
E2.11. Application du théorème de Noether.....	95
E2.12. Ondes transversales élastiques dans un solide (ondes P).....	95
E2.13. Petites oscillations avec amortissement.....	96
P2.14. Dérive d'une particule dans un champ électromagnétique constant	97
P2.15. Vibration d'une molécule linéaire triatomique. Le mode "mou"	98
P2.16. Le pendule de L. Foucault	98
P2.17. Précession des équinoxes.....	100
P2.18. Système de trois particules.....	102
P2.19. Vibration de flexion d'une lame	103
P2.20. Ondes solitaires	105
P2.21. Modes de vibration d'une chaîne d'atomes.....	106
 INDICATIONS ET REPONSES	107
E2.5. Disque sur un coin en mouvement.....	107
E2.6. Constance du moment cinétique	107
E2.7. Mouvement cyclotron	107
E2.8. Intégrale de Painlevé (1)	107
E2.9. Intégrale de Painlevé (2)	108
E2.10. Lagrangien dans un référentiel tournant.....	108
E2.11. Application du théorème de Noether.....	108
E2.12. Ondes transversales élastiques dans un solide (ondes P).....	109
E2.13. Petites oscillations avec amortissement.....	109
P2.14. Dérive d'une particule dans un champ électromagnétique constant	109
P2.15. Vibration d'une molécule linéaire triatomique. Le mode "mou"	110
P2.16. Le pendule de L. Foucault	111
P2.17. Précession des équinoxes.....	111
P2.18. Système de trois particules.....	112
P2.19. Vibration de flexion d'une lame	113
P2.20. Ondes solitaires	113
P2.21. Modes de vibration d'une chaîne d'atomes.....	114

Chapitre 3 – Le principe de Hamilton	117
COURS	117
3.1. La fonctionnelle action.....	118
3.1.1. Notion de fonctionnelle.....	118
3.1.2. Fonctionnelle action.....	119
3.2. Méthode des variations avec des contraintes	125
3.2.1. Contraintes de type holonôme	125
3.2.2. Contraintes de forme intégrale	128
3.3. Mécanique relativiste pour une particule	131
Résumé – Principe de Hamilton	134
EXERCICES PROPOSES DANS LE COURS	135
E3.1. Force de Lorentz.....	135
E3.2. Fonctionnelle avec dérivée seconde	136
COMPLEMENTS	136
C3.1. Action pour un nombre infini de degrés de liberté : équations de Lagrange pour les champs	136
C3.2. L'action pour le champ scalaire : le potentiel de Yukawa.....	140
C3.3. Action et mécanique quantique.....	141
EXERCICES ET PROBLEMES	143
E3.3. La chute libre	143
E3.4. Action minimum ou maximum ?	144
E3.5. Principe de moindre action ?	144
E3.6. N'existe-t-il qu'une seule solution qui rende stationnaire l'action ?.....	145
E3.7. Principe de Fermat	146
E3.8. Principe de Maupertuis	146
E3.9. Champ de force uniforme	147
E3.10. Mouvement libre sur un ellipsoïde	148
E3.11. Aire minimum à volume fixé.....	148
E3.12. Particule relativiste dans un champ de force central.....	149
E3.13. Chaîne de pendules.....	150
E3.14. Équation d'onde pour la lame flexible libre.....	151
E3.15. Champ de Schrödinger	151
P3.16. Forme des films de savon.....	151
E3.17. La stratégie du skieur	152
P3.18. Loi de Laplace sur la tension superficielle	153
P3.19. Précession de l'orbite de Mercure	154
INDICATIONS ET REPONSES.....	155
E3.3. La chute libre	155
E3.4. Minimum ou maximum ?	155
E3.5. Principe de moindre action ?	156
E3.6. N'existe-t-il qu'une seule solution qui rende stationnaire l'action ?.....	156
E3.7. Principe de Fermat	157

E3.8. Principe de Maupertuis	157
E3.9. Champ de force uniforme	158
E3.10. Mouvement libre sur un ellipsoïde	158
E3.11. Aire minimum à volume fixé	158
E3.12. Particule relativiste dans un champ de force central	158
E3.13. Chaîne de pendules	159
E3.14. Équation d'onde pour la lame flexible libre	160
E3.15. Champ de Schrödinger	160
P3.16. Forme des films de savon	160
P3.17. La stratégie du skieur	160
P3.18. Loi de Laplace sur la tension superficielle	160
P3.19. Précession de l'orbite de Mercure	161
 Chapitre 4 – Formalisme hamiltonien	163
COURS	163
4.1. Introduction	163
4.2. La transformation de Legendre d'une fonction	165
4.3. Les équations de Hamilton	167
4.3.1. La fonction de Hamilton	167
4.3.2. Les équations de Hamilton	168
4.4. Théorème de Liouville	171
4.4.1. Flot hamiltonien	171
4.4.2. Théorème de Liouville	174
4.4.3. Théorème du retour de Poincaré	177
4.5. Systèmes autonomes à un degré de liberté	179
Résumé – Équations de Hamilton	187
 EXERCICES PROPOSES DANS LE COURS	189
E4.1. Transformation de Legendre inverse	189
E4.2. Conservation de l'aire	189
E4.3. Le premier invariant intégral	190
E4.4. Comportement autour d'un point elliptique	190
 COMPLEMENTS	191
C4.1. Principe de moindre action et formalisme hamiltonien	191
C4.2. Résonance paramétrique	192
C4.3. Espace de phase et mécanique quantique	196
 EXERCICES ET PROBLEMES	198
E4.5. Plus rapide et plus écologique que le Concorde	198
E4.6. Les charges électriques peuvent être piégées par des conducteurs	199
E4.7. Double puits parabolique	200
E4.8. Hamiltonien d'une particule chargée	201
E4.9. Quid des systèmes non autonomes	201
E4.10. Temps et énergie : variables conjuguées ?	201
E4.11. Stabilité des trajectoires circulaires dans un potentiel central	202

E4.12. Trajectoires dans un champ de force central	203
E4.13. Symétrie de la trajectoire	203
E4.14. Hamiltonien dans un référentiel tournant.....	204
E4.15. Flots hamiltoniens identiques	204
E4.16. Équation de Maxwell-Vlasov	204
P4.17. Perle sur le cerceau.....	205
P4.18. Le pendule inversé	206
P4.19. Lumineuses équations de Hamilton.....	207
P4.20. Le vecteur de Runge-Lenz	208
P4.21. L'application du billard.....	209
 INDICATIONS ET REPONSES	210
E4.5. Plus rapide et plus écologique que le Concorde.....	210
E4.6. Les charges électriques piégées par des conducteurs	211
E4.7. Double puits parabolique	211
E4.8. Hamiltonien d'une particule chargée.....	212
E4.9. Quid des systèmes non autonomes	212
E4.10. Temps et énergie : variables conjuguées ?	212
E4.11. Trajectoires circulaires dans un potentiel central.....	212
E4.12. Trajectoires dans un champ de force central	213
E4.13. Symétrie de la trajectoire	214
E4.14. Hamiltonien dans un référentiel tournant.....	214
E4.15. Flots hamiltoniens identiques	214
E4.16. Équation de Maxwell-Vlasov	214
P4.17. Perle sur le cerceau.....	214
P4.18. Le pendule inversé	216
P4.19. Lumineuses équations de Hamilton.....	217
P4.20. Le vecteur de Runge-Lenz	217
P4.21. L'application du billard.....	217
 Chapitre 5 – Formalisme de Hamilton-Jacobi	219
 COURS	219
5.1. La fonction action : deuxième acte.....	219
5.2. L'équation de Hamilton-Jacobi	222
5.3. Le théorème de Jacobi.....	224
5.4. La fonction action réduite	226
5.5. Cas de séparation des variables	228
Résumé – Équations de Hamilton-Jacobi.....	233
 EXERCICES PROPOSES DANS LE COURS	233
E5.1. Action pour l'oscillateur harmonique à une dimension.....	233
E5.2. Action versus action réduite	234
 COMPLEMENTS	235
C5.1. Principe de Maupertuis	235
C5.2. Analogie optique-mécanique	239

C5.3. Ondes / approximation eikonale	241
C5.4. Schrödinger versus Hamilton-Jacobi.....	243
EXERCICES ET PROBLEMES	244
E5.3. Vitesse de phase et vitesse de groupe.....	244
E5.4. Hamiltonien séparable, action séparable	245
E5.5. Principe de Maupertuis avec champ électromagnétique.....	246
E5.6. Mouvement sur une surface et géodésique.....	247
P5.7. Surface d'onde pour la chute libre	248
P5.8. Effet Stark.....	248
P5.9. Fronts d'onde bizarres.....	248
P5.10. Lentille électrostatique	249
P5.11. Orbites des satellites de la Terre.....	250
INDICATIONS ET REPONSES	253
E5.3. Vitesse de phase et vitesse de groupe.....	253
E5.4. Hamiltonien séparable, action séparable	253
E5.5. Principe de Maupertuis avec champ électromagnétique.....	254
E5.6. Mouvement sur une surface et géodésique.....	254
P5.7. Surface d'onde et chute libre	254
P5.8. Effet Stark.....	255
P5.9. Fronts d'onde bizarres.....	255
P5.10. Lentille électrostatique	256
P5.11. Orbites des satellites de la Terre.....	256
Chapitre 6 – Systèmes intégrables.....	257
COURS	257
6.1. Systèmes réguliers ou chaotiques ?	257
6.2. Notion et exemple de systèmes intégrables.....	259
6.3. Un système intégrable très simple	261
6.4. Systèmes intégrables à plus d'un degré de liberté	267
6.4.1. Crochets de Poisson : le minimum à savoir	267
6.4.2. Systèmes intégrables	269
6.5. Variables angles-actions	273
6.5.1. Indépendance du contour	274
6.5.2. Définition des variables angles-actions.....	275
6.5.3. Quasi-périodicité ou périodicité	278
Résumé – Systèmes intégrables.....	279
EXERCICES PROPOSES DANS LE COURS	280
E6.1. Transformations ponctuelles.....	280
E6.2. Conservation des aires dans une transformation canonique	281
E6.3. Expression de la période pour un mouvement à une dimension	281
E6.4. Quid des systèmes non autonomes	282
E6.5. Calcul du crochet de Poisson $\{q,p\}$	282

E6.6. Invariance du crochet de Poisson dans une transformation canonique	282
E6.7. Invariance de la circulation par déformation continue	283
COMPLEMENTS	284
C6.1. Générateurs des transformations canoniques	284
C6.2. Un peu plus sur les crochets de Poisson	288
C6.3. Cas d'un système complètement séparable	290
C6.4. Et la mécanique quantique dans tout cela ?	291
EXERCICES ET PROBLEMES	293
E6.8. Fonctions génératrices.....	293
E6.9. Choix de l'impulsion.....	294
E6.10. Comment vérifier si une transformation de contact indépendante du temps est canonique ?.....	294
E6.11. Une transformation canonique dépendant du temps	295
E6.12. Rotation dans trois dimensions et crochet de Poisson	295
E6.13. Particule à une dimension dans une boîte	295
E6.14. La chute libre à une dimension	296
E6.15. Balle rebondissant sur le sol	296
P6.16. La particule dans un champ magnétique constant	296
P6.17. Toujours la chute libre à une dimension.....	297
P6.18. Balle rebondissant sur un plateau en mouvement	297
P6.19. Dilatation d'échelle en fonction du temps.....	298
P6.20. Actions pour le problème de Kepler.....	298
P6.21. Énergie en fonction des actions	299
P6.22. De l'oscillateur harmonique au problème coulombien.....	300
INDICATIONS ET REPONSES	301
E6.8. Fonctions génératrices.....	301
E6.9. Choix de l'impulsion.....	301
E6.10. Comment vérifier si une transformation de contact indépendante du temps est canonique ?	301
E6.11. Une transformation canonique dépendant du temps	301
E6.12. Rotation dans trois dimensions et crochet de Poisson	302
E6.13. Particule à une dimension dans une boîte	302
E6.14. La chute libre à une dimension	302
E6.15. Balle rebondissant sur le sol	302
P6.16. La particule dans un champ magnétique constant	303
P6.17. Toujours la chute libre à une dimension.....	303
P6.18. Balle rebondissant sur un plateau en mouvement	303
P6.19. Dilatation d'échelle en fonction du temps.....	304
P6.20. Actions pour le problème de Kepler.....	304
P6.21. Énergie en fonction des actions	304
P6.22. De l'oscillateur harmonique au problème coulombien.....	304

Chapitre 7 – Systèmes quasi intégrables	307
COURS	307
7.1. Introduction	307
7.2. Traitement canonique des perturbations.....	308
7.2.1. Exposé du principe.....	308
7.2.2. Perturbation canonique à un degré de liberté.....	311
7.2.3. Cas à plusieurs degrés de liberté : le problème des petits diviseurs.....	318
7.3. Les invariants adiabatiques	322
Résumé – Systèmes quasi intégrables	329
EXERCICES PROPOSES DANS LE COURS	329
E7.1. Limites du développement perturbatif.....	329
E7.2. Et au-delà du premier ordre ?	330
E7.3. Développement perturbatif non canonique versus canonique	331
E7.4. La moyenne des actions perturbées est nulle	331
COMPLEMENTS	332
C7.1. Et la mécanique quantique ?	332
C7.2. Perturbations périodiques rapides.....	333
EXERCICES ET PROBLEMES	335
E7.5. Première correction canonique au pendule	335
E7.6. Invariant adiabatique dans un ascenseur	336
E7.7. L'oscillateur harmonique à pulsation variable.....	337
E7.8. Particule soumise à une force périodique.....	337
E7.9. Particule soumise à une force uniforme périodique.....	338
P7.10. Perle sur une tige rigide : la phase de Hannay	338
P7.11. Invariant adiabatique et détente adiabatique	340
P7.12. Charge dans un champ magnétique lentement variable.....	341
INDICATIONS ET REPONSES	342
E7.5. Première correction canonique au pendule	342
E7.6. Invariant adiabatique dans un ascenseur	343
E7.7. L'oscillateur harmonique à pulsation variable.....	344
E7.8. Particule soumise à une force périodique.....	344
E7.9. Particule soumise à une force uniforme périodique.....	344
P7.10. Perle sur une tige rigide : la phase de Hannay	345
P7.11. Invariant adiabatique et détente adiabatique	345
P7.12. La particule dans un champ magnétique lentement variable.....	346
Chapitre 8 – De l'ordre au chaos	347
COURS	347
8.1. Introduction	347
8.2. Le rotateur percuté	351
8.2.1. Description du modèle	351
8.2.2. Expérimentation numérique.....	354

8.3.	Le théorème KAM	363
8.3.1.	Énoncé et définitions.....	364
8.3.2.	Le théorème des points fixes	368
8.3.3.	Comportement au voisinage d'une trajectoire périodique.....	371
8.3.4.	Les séparatrices et la nursery du chaos	377
	Résumé – Le chaos : où, comment, pourquoi ?	382
	EXERCICES PROPOSES DANS LE COURS	382
E8.1.	Application standard et points fixes d'ordre 5	382
E8.2.	Condition de dégénérescence.....	383
E8.3.	Disparition des tores résonnantes	384
E8.4.	Fractions continues ou comment jouer avec les irrationnels.....	385
E8.5.	Propriétés de l'espace de phase de l'application standard.....	387
E8.6.	Étude des points fixes d'ordre 2 de l'application standard.....	387
	COMPLEMENTS	390
C8.1.	Imprévisibilité et déterminisme	390
C8.2.	Le théorème KAM et la mécanique céleste.....	394
C8.3.	Section de Poincaré	397
C8.4.	Chaos et mécanique quantique	401
	EXERCICES ET PROBLEMES	403
E8.7.	Le théorème de Poincaré-Birkhoff pour l'application standard	403
E8.8.	Bifurcation de la trajectoire périodique 1:1 de l'application standard	404
E8.9.	Chaos-ergodicité : une nuance	404
E8.10.	Les modes d'accélération : une curiosité de l'application standard.....	406
E8.11.	Comment réaliser un rotateur percuté ?	406
P8.12.	L'application de Anosov (ou chat de Arnold).....	407
P8.13.	L'accélérateur de Fermi	409
P8.14.	Pendule amorti et application non standard	410
P8.15.	Stabilité des orbites périodiques dans les billards.....	411
P8.16.	Les points de Lagrange : grecs et troyens de Jupiter	414
	INDICATIONS ET REPONSES.....	417
E8.7.	Théorème de Poincaré-Birkhoff	417
E8.8.	Bifurcation de la trajectoire périodique 1:1.....	417
E8.9.	Chaos et ergodicité : une nuance	418
E8.10.	Les modes d'accélération.....	418
E8.11.	Comment réaliser un rotateur percuté ?	418
P8.12.	L'application de Anosov	419
P8.13.	L'accélérateur de Fermi	420
P8.14.	Pendule amorti.....	420
P8.15.	Stabilité des orbites périodiques dans les billards.....	421
P8.16.	Les points de Lagrange	422

Annexe 1 – Rappels d'électromagnétisme	423
Annexe 2 – Indications sur la résolution des équations différentielles	427
Annexe 3 – Coordonnées elliptiques et paraboliques	431
Annexe 4 – Brève histoire de la mécanique	435
Bibliographie	445
Index	449
Table des matières	457