

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Avant-propos</b> .....	5
<b>Chapitre 1. Représentation graphique de fonctions</b> .....	9
1.1. Les tableurs .....	9
1.2. Java et PtPlot .....	10
1.3. Python et Matplotlib .....	11
1.4. Gnuplot .....	12
1.5. Maple .....	13
1.6. Scilab .....	14
1.7. Grace .....	16
1.8. Pour en savoir plus .....	16
1.9. Exercices .....	18
<b>Chapitre 2. Calcul et approximation de fonctions</b> .....	23
2.1. Polynômes et fractions rationnelles .....	24
2.2. Relations de récurrence .....	25
2.3. Développement limité .....	26
2.4. Approximant de Padé .....	28
2.5. Utilisation de bibliothèques de programmes .....	30
2.6. Approximation de fonctions .....	30
2.7. Développement asymptotique .....	32
2.8. Représentation des nombres en machine .....	34
2.8.1. Les nombres entiers .....	34
2.8.2. Les nombres fractionnaires .....	35
2.9. Pour en savoir plus .....	36
2.10. Exercices .....	37

2.11. Projets .....	43
<b>Chapitre 3. Représentation des grandeurs physiques .....</b>	<b>49</b>
3.1. Une méthode simple de « dédimensionnement » .....	50
3.2. Construction systématique de variables sans dimension .....	51
3.3. Pour en savoir plus .....	53
3.4. Exercices .....	53
<b>Chapitre 4. L'interpolation .....</b>	<b>57</b>
4.1. Définition de l'interpolation .....	58
4.2. Méthode des coefficients indéterminés .....	59
4.3. Le polynôme d'interpolation de Lagrange .....	60
4.4. Le polynôme de Newton .....	62
4.4.1. Interpolation linéaire .....	62
4.4.2. Les différences divisées .....	63
4.4.3. La formule de Newton .....	63
4.5. L'erreur d'interpolation .....	66
4.6. Interpolation entre pivots équidistants .....	68
4.6.1. Les différences finies latérales .....	68
4.6.2. La formule d'interpolation de Newton .....	69
4.7. Le polynôme d'interpolation de Hermite .....	71
4.8. L'interpolation inverse .....	72
4.9. L'interpolation par intervalle .....	73
4.10. L'interpolation « spline » .....	74
4.11. Interpolation à deux ou plusieurs dimensions .....	78
4.12. Pour en savoir plus .....	79
4.13. Exercices .....	79
4.14. Projets .....	82
<b>Chapitre 5. Résolution d'équations non linéaires .....</b>	<b>85</b>
5.1. Méthode de bisection ou de dichotomie .....	86
5.2. Méthode « Regula falsi » ou des parties proportionnelles .....	87
5.3. Méthode du point fixe ou d'itération .....	88
5.4. Méthode de Newton .....	90

5.5. Méthode de la sécante .....	93
5.6. Résolution de systèmes d'équations .....	93
5.7. Racines des polynômes .....	96
5.7.1. Division des polynômes .....	96
5.7.2. Séparation des racines .....	98
5.7.3. Suites de Sturm .....	99
5.7.4. La méthode de Newton pour les polynômes .....	101
5.7.5. Scilab et les polynômes .....	102
5.7.6. Condition du problème .....	103
5.8. Pour en savoir plus .....	104
5.9. Exercices .....	104
<b>Chapitre 6. Résolution de systèmes d'équations linéaires .....</b>	<b>109</b>
6.1. Le « conditionnement » .....	111
6.2. Orientation .....	112
6.3. Méthode de Gauss .....	113
6.3.1. Algorithme .....	113
6.3.2. Méthode de Gauss–Jordan .....	117
6.3.3. Décomposition $LU$ .....	117
6.3.4. Représentation matricielle de l'élimination .....	119
6.3.5. Permutation de lignes .....	121
6.3.6. Nombre d'opérations .....	124
6.3.7. Calcul de l'inverse de $A$ .....	125
6.4. Factorisation directe .....	125
6.4.1. Variantes .....	126
6.5. Matrices particulières .....	127
6.5.1. Matrice à diagonale dominante .....	127
6.5.2. Matrice symétrique définie positive .....	127
6.5.3. Matrice bande .....	128
6.5.4. Système tridiagonal .....	129
6.6. Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires .....	130
6.6.1. Méthode de Jacobi .....	130
6.6.2. Méthode de Gauss–Seidel .....	132

6.6.3. Méthode de surrelaxation .....	133
6.6.4. Convergence des méthodes itératives .....	134
6.7. Système surdéterminé .....	135
6.8. Pour en savoir plus .....	136
6.9. Exercices .....	137
6.10. Projet .....	139
6.11. Annexe : rappels d'algèbre linéaire .....	140
6.11.1. Base et sous-espace .....	140
6.11.2. Image, noyau et rang .....	140
6.11.3. Inverse et déterminant .....	141
6.11.4. Normes vectorielles .....	141
6.11.5. Normes de matrices .....	142
6.11.6. Opérations sur des blocs .....	143
<b>Chapitre 7. Polynômes orthogonaux .....</b>	<b>145</b>
7.1. Définition, existence .....	145
7.2. Relation avec les polynômes habituels .....	147
7.3. Propriétés des zéros .....	147
7.4. Relation de récurrence .....	148
7.5. Équation différentielle .....	149
7.6. Fonction génératrice .....	149
7.7. Formule de Rodrigues .....	150
7.8. Identité de Darboux–Christofel .....	150
7.9. Polynômes particuliers .....	150
7.9.1. Legendre .....	150
7.9.2. Hermite .....	151
7.9.3. Laguerre .....	152
7.9.4. Tschebychef .....	153
7.10. Autres polynômes classiques .....	154
7.10.1. Jacobi .....	154
7.10.2. Laguerre généralisé .....	154
7.11. Pour en savoir plus .....	154
7.12. Exercices .....	155

<b>Chapitre 8. Dérivation et intégration numériques</b> .....	159
8.1. Rappels d'analyse .....	159
8.2. Dérivée d'une fonction analytique .....	160
8.2.1. Développements limités .....	160
8.2.2. Méthode des coefficients indéterminés .....	162
8.2.3. Dérivée du polynôme d'interpolation .....	163
8.2.4. Accélération de la convergence .....	163
8.3. Dérivée d'une fonction empirique .....	164
8.4. Généralités sur l'intégration numérique .....	165
8.5. Méthodes élémentaires d'intégration .....	166
8.6. Méthodes de Newton–Cotes .....	168
8.6.1. Intervalle fermé .....	168
8.6.2. Intervalle ouvert .....	170
8.6.3. Formules composites .....	171
8.7. Méthode de Romberg .....	172
8.8. Intégration de Gauss .....	174
8.9. Généralisations de la méthode de Gauss .....	176
8.10. Les intégrales généralisées .....	177
8.11. Les intégrales multiples .....	177
8.12. L'intégrale sans peine .....	178
8.13. Pour en savoir plus .....	179
8.14. Exercices .....	179
8.15. Projet .....	184
<b>Chapitre 9. Analyse spectrale, transformation de Fourier numérique</b> .....	187
9.1. Les méthodes de Fourier .....	187
9.1.1. Série de Fourier .....	187
9.1.2. Intégrale ou transformée de Fourier (TF) .....	188
9.1.3. Vocabulaire et notations .....	189
9.1.4. Échantillonnage .....	189
9.1.5. Transformée de Fourier d'une fonction échantillonnée (TFTD) ..	190
9.2. Transformée de Fourier discrète (TFD) .....	191
9.2.1. Définition .....	191

9.2.2. La TFD comme approximation de l'intégrale de Fourier	191
9.2.3. Notation matricielle pour la TFD	192
9.3. Transformée de Fourier rapide (TFR)	193
9.3.1. Algorithme de Cooley–Tukey ou « entrelacement en temps »	194
9.3.2. Le renversement binaire	197
9.3.3. Factorisation de la matrice $\mathbf{V}$ et variantes de l'algorithme TFR	197
9.4. Propriétés de la transformée de Fourier discrète	199
9.5. Pour en savoir plus	205
9.6. Exercices	205
9.7. Projet	207
<b>Chapitre 10. Valeurs propres, vecteurs propres</b>	<b>209</b>
10.1. Les éléments propres sans peine	210
10.2. Méthode de la puissance $n$ -ième et méthodes dérivées	211
10.2.1. Puissance $n$ -ième	211
10.2.2. Puissance $n$ -ième avec décalage	213
10.2.3. Puissance $n$ -ième de l'inverse	213
10.2.4. Puissance $n$ -ième de l'inverse avec décalage	213
10.2.5. Quotient de Rayleigh	214
10.3. Méthode de Jacobi	215
10.3.1. Principe	215
10.3.2. Mise en œuvre	216
10.4. Transformation de Householder	221
10.5. Factorisation QR et algorithme QR	224
10.5.1. Factorisation QR	224
10.5.2. Algorithme QR	225
10.6. Réduction à la forme tridiagonale et calcul des valeurs propres	227
10.6.1. Tridiagonalisation	227
10.6.2. Calcul des valeurs propres	228
10.7. Matrices hermitiennes	230
10.8. Pour en savoir plus	231
10.9. Exercices	231
10.10. Projets	234

<b>Chapitre 11. Problèmes différentiels à conditions initiales</b> .....	239
11.1. Méthodes analytiques .....	241
11.1.1. Développement de Taylor .....	241
11.1.2. Méthode des coefficients indéterminés (Frobenius) .....	242
11.1.3. Méthode de Picard, ou d'approximations successives .....	242
11.2. Méthodes d'Euler et de Taylor .....	243
11.3. Méthodes de Runge–Kutta .....	246
11.3.1. Méthodes d'ordre 2 .....	246
11.3.2. Méthode d'ordre d'ordre 4 .....	247
11.3.3. Avantages et inconvénients des méthodes de Runge–Kutta ....	250
11.3.4. Organisation d'un programme .....	251
11.4. Ordre, stabilité et convergence des méthodes à un pas .....	251
11.5. Méthodes à pas multiples .....	255
11.5.1. Schémas explicites (ouverts) .....	255
11.5.2. Schémas implicites (fermés) .....	257
11.5.3. Méthodes de prédiction-corrrection .....	258
11.5.4. Surveillance de l'erreur .....	260
11.5.5. Formules d'ordre 4 .....	260
11.5.6. Avantages et inconvénients des méthodes à pas multiples ....	261
11.6. Ordre, stabilité et convergence des méthodes multi-pas .....	261
11.7. Méthodes pour les équations du second ordre .....	262
11.7.1. Algorithme de Verlet ou de saute-mouton .....	262
11.7.2. Algorithme de Numerov .....	263
11.8. Équations « raides » .....	264
11.9. Résoudre une équation différentielle en dormant .....	265
11.10. Pour en savoir plus .....	269
11.11. Exercices .....	269
11.12. Projets .....	273
 <b>Chapitre 12. Problèmes à conditions aux limites et                   problèmes aux valeurs propres</b> .....	 277
12.1. La méthode du tir .....	279
12.1.1. Problème aux limites .....	279

12.1.2. Problèmes de valeurs propres .....	281
12.2. Méthodes des différences finies .....	282
12.2.1. Problème aux limites .....	282
12.2.2. Problème de valeurs propres .....	284
12.3. Les boîtes noires .....	287
12.4. Pour en savoir plus .....	288
12.5. Exercices .....	288
12.6. Projets .....	290
<b>Chapitre 13. Équations aux dérivées partielles .....</b>	<b>297</b>
13.1. Approximation des dérivées par des différences finies .....	297
13.2. Équations de Laplace et Poisson .....	298
13.3. Équation de la chaleur .....	300
13.4. Équation des ondes .....	303
13.5. Pour en savoir plus .....	304
13.6. Exercices .....	305
13.7. Projet .....	306
<b>Chapitre 14. Probabilités et erreurs .....</b>	<b>309</b>
14.1. Probabilité .....	309
14.2. Loix de probabilité .....	311
14.2.1. Loi binomiale .....	311
14.2.2. Loi de Poisson .....	312
14.2.3. Loi uniforme .....	313
14.2.4. Loi normale ou de Gauss .....	313
14.2.5. Loi du $\chi^2$ ou de Pearson .....	314
14.2.6. Paramètres de la loi de probabilité et paramètres de l'échantillon .....	315
14.2.7. Vérification d'une loi de probabilité .....	316
14.3. Erreurs .....	317
14.4. Propagation des erreurs .....	320
14.5. Méthode du maximum de vraisemblance .....	321
14.6. Méthode des moindres carrés .....	323
14.6.1. Ajustement sur une fonction affine .....	324



14.6.2. Linéarisation .....	326
14.7. Qualité de l'ajustement .....	326
14.8. Coefficient de corrélation .....	329
14.9. Ajustement sur une fonction linéaire de plusieurs paramètres .....	329
14.10. Pour en savoir plus .....	331
14.11. Exercices .....	332
<b>Chapitre 15. Méthodes de Monte Carlo</b> .....	<b>337</b>
15.1. Générateurs de nombres aléatoires .....	338
15.1.1. Principe .....	338
15.1.2. Vérification d'un GNA .....	339
15.1.3. Validation d'un GNA à l'aide d'une marche aléatoire .....	340
15.2. Nombres aléatoires à répartition non-uniforme .....	341
15.2.1. Fonction d'une variable aléatoire .....	342
15.2.2. Méthode de la fonction réciproque ou du changement de variable .....	343
15.2.3. La méthode du rejet de von Neumann .....	344
15.2.4. La distribution normale .....	345
15.3. Simulation de phénomènes aléatoires .....	346
15.3.1. La radioactivité .....	347
15.3.2. L'agrégation .....	348
15.4. Méthodes de Monte Carlo déterministes : calcul d'intégrales .....	349
15.4.1. Calcul de $\pi$ .....	349
15.4.2. Avantages et inconvénients des méthodes stochastiques pour le calcul d'intégrales .....	350
15.4.3. Intégrales par la méthode du rejet .....	351
15.4.4. Intégrales par la valeur moyenne .....	352
15.5. Pour en savoir plus .....	353
15.6. Exercices .....	354
15.7. Projet .....	356
<b>Index</b> .....	<b>359</b>
<b>Table des matières</b> .....	<b>363</b>

