

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	5
Chapitre 1. Divisibilité, monoïdes et groupes	9
1.1. Numération de position	9
1.2. Pgcd et Ppcm	11
1.2.1. Pgcd, majorant	11
1.2.2. Calcul du Pgcd et théorème de BÉZOUT	13
1.2.3. Ppcm	17
1.3. Nombres premiers	18
1.4. Monoïdes et groupes	23
1.4.1. Action sur un ensemble et quotient	29
1.4.2. Groupe associé à un monoïde commutatif régulier	39
1.5. Fractions continues	41
1.5.1. Comment résoudre le problème de BÉZOUT?	46
1.6. Monoïdes libres	47
1.6.1. Mots	47
1.6.2. Monoïdes libres commutatifs	53
1.6.3. Ascii et génome	55
1.6.4. Pgcd et Ppcm dans les monoïdes libres commutatifs	56
1.7. Graphes	58
1.8. Graphe d'un monoïde	59
1.8.1. Un exemple : l'arbre de STERN-BROCOT	63
1.8.2. Action sur les graphes	66
1.9. Groupes libres	67

1.9.1. Produit libre de groupes	67
1.9.2. Groupes libres et bases	70
1.9.3. Groupes abéliens libres	73
1.9.4. Dimension	74
1.10. Graphes de CAYLEY et groupes libres	75
1.10.1. Sous-groupes des groupes libres	76
1.10.2. Groupes de présentation finie	78
Chapitre 2. Fonctions, anneaux et modules	81
2.1. Fonctions : covariance et contravariance	82
2.2. Anneaux, corps, modules et algèbres	83
2.2.1. Anneaux, corps et algèbres	83
2.2.2. Modules, fonctions et modules libres	87
2.2.3. Algèbres	94
2.2.4. Dualité et bidualité	94
2.3. Produit, somme et quotient des modules	96
2.3.1. Produits, ou sommes directes	97
2.3.2. Quotients et suites exactes	99
2.3.3. Modules sur les anneaux produits	103
2.4. Produit tensoriel	105
2.4.1. Changement de base et produit tensoriel	109
2.4.2. Trace, dualité et produit tensoriel	111
2.5. Matrices	112
2.5.1. Lignes et colonnes : la dualité	116
2.5.2. Somme directe et produit tensoriel de matrices	120
2.6. Monoïdes et convolutions	122
2.6.1. Produit de convolution	123
2.6.2. Convolution sur l'algèbre formelle d'un monoïde	128
2.6.3. Convolution des fonctions réelles	130
2.6.4. Algèbres de groupes	131
Chapitre 3. Compter	135
3.1. Dénombrements	135

3.1.1. Coefficients binomiaux	135
3.1.2. Indicatrice d'EULER	139
3.2. Valuations, intégrité et inverses	140
3.2.1. Séries génératrices : le cas additif	143
3.2.2. Action du groupe symétrique et sommes de NEWTON	146
3.2.3. BÉZOUT qualitatif	149
3.3. Partitions d'un entier	154
3.3.1. Permutations, cycles et partitions	156
3.4. Fonctions zêta, fonctions de MÖBIUS	160
3.5. Nombres et polynômes de BERNOULLI	164
3.5.1. Calcul de $\zeta(2n)$	168
3.5.2. Théorème des nombres premiers	172
Chapitre 4. Les anneaux commutatifs	175
4.1. Les entiers relatifs	175
4.1.1. Le groupe additif \mathbf{Z}	175
4.1.2. L'anneau \mathbf{Z}	177
4.2. Idéaux et anneaux quotients	179
4.2.1. Quotients de \mathbf{Z}	182
4.2.2. Inversibles des groupes cycliques	188
4.3. Principal, factoriel	192
4.3.1. Irréductibles dans un anneau intègre	192
4.3.2. Anneaux principaux	193
4.3.3. Anneaux euclidiens	195
4.3.4. Division euclidienne des polynômes	196
4.3.5. Anneaux factoriels	198
4.4. De la numération de position aux p -adiques	205
4.5. Sommes de deux carrés	212
4.5.1. Une formule de JACOBI	217
Chapitre 5. Évaluation, zéros et graduation	221
5.1. Caractéristique	221
5.2. Évaluation, fonctions polynômes	222

5.3. Polynômes universels	227
5.3.1. Substitutions et automorphismes	233
5.4. Graduations	235
Chapitre 6. Modules, diviseurs élémentaires et CAYLEY-HAMILTON	239
6.1. Matrices élémentaires	240
6.2. Théorème des diviseurs élémentaires	241
6.3. Modules sur les anneaux principaux	251
6.3.1. Sous-modules des modules libres : les réseaux	251
6.3.2. Modules de type fini	255
6.4. Anneaux et modules noethériens	258
6.5. Espaces vectoriels, matrices semblables et CAYLEY-HAMILTON	262
6.5.1. Base des espaces vectoriels, dimension et rang	262
6.5.2. Changement de corps de base	268
6.5.3. Matrices semblables et CAYLEY-HAMILTON	268
6.5.4. Diagonalisables, triangularisables	275
6.5.5. Inverse d'une matrice	280
6.6. Générateurs et relations pour $SL_2(\mathbf{Z})$	282
6.7. Pivot de GAUSS et décomposition de BRUHAT	284
6.8. Circuits électriques	289
6.8.1. Quadripôles	290
6.8.2. Réseaux électriques et lois de KIRCHHOFF	291
6.9. Matrices carrées sur les corps finis	293
Chapitre 7. Corps et torsion	297
7.1. Localisation	297
7.2. L'ensemble \mathbf{Q} des rationnels	303
7.2.1. La numérotation de position des rationnels	304
7.3. La torsion sur les anneaux principaux	311
7.3.1. Modules primaires de type fini	314
7.3.2. Décomposition de JORDAN	316
7.3.3. Parties principales	318
7.3.4. Éléments simples	321

7.3.5. Le groupe additif \mathbf{Q}	322
7.4. Groupes multiplicatifs des corps	325
7.4.1. Sous-groupes multiplicatifs finis	325
7.4.2. Le groupe multiplicatif des rationnels	326
7.4.3. Le groupe multiplicatif des corps p -adiques	329
Chapitre 8. Actions des groupes symétriques	331
8.1. Groupes symétriques et signature	331
8.2. Présentation des groupes symétriques	336
8.3. Polynômes symétriques	343
8.3.1. Invariants du groupe alterné	347
8.4. Déterminant et algèbre extérieure	351
8.4.1. Formes alternées et algèbre extérieure	352
8.4.2. Déterminants et volumes	358
8.4.3. Volumes et intégration	367
8.5. Théorème de CAYLEY-HAMILTON	371
8.5.1. Déterminant et groupe symétrique	373
8.5.2. Algèbre symétrique	374
8.5.3. Bosons et Fermions	375
8.6. Résultant	377
8.6.1. Volume de l'application de BÉZOUT	377
8.6.2. Le résultant comme polynôme symétrique	380
8.6.3. Discriminant	382
8.6.4. Déterminants de multiplications	384
8.6.5. Courbes planes	385
8.6.6. Loi de réciprocité quadratique	389
8.6.7. Fractions rationnelles et séries formelles	393
Chapitre 9. Extensions de corps et d'anneaux	395
9.1. Extensions de corps	396
9.2. Extensions d'anneaux : les entiers	402
9.3. Algèbres commutatives	406
9.3.1. Algèbres commutatives finies sur \mathbf{k}	406

9.3.2. Nullstellensatz	408
9.4. Racines de l'unité, cyclotomie	411
9.4.1. Racines, et racines primitives, de l'unité	411
9.4.2. Polynômes cyclotomiques entiers	413
9.4.3. Racines des polynômes cyclotomiques	415
9.4.4. Extensions cyclotomiques de \mathbf{Q}	417
9.5. Corps finis	420
9.5.1. Corps finis et symboles de LEGENDRE	421
9.5.2. Fonction zêta d'un corps fini	425
9.5.3. Classification et automorphismes des corps finis	427
9.5.4. Un mot sur la théorie de GALOIS	430
9.6. Les corps finis sont commutatifs	431
9.6.1. Réduction des polynômes cyclotomiques	433
9.7. Corps des fractions rationnelles	434
Chapitre 10. Espaces projectifs et formes quadratiques	439
10.1. Espaces projectifs	439
10.1.1. Homographies	440
10.1.2. Placer un hyperplan à l'infini	441
10.1.3. Droite projective et birapport	444
10.2. Groupes projectifs en dimension 1	448
10.2.1. Groupes projectifs sur les corps finis	448
10.2.2. Cinq et sept : icosaèdre, plan de FANO	450
10.3. Formes quadratiques	455
10.3.1. Décomposition en somme de carrés	461
10.3.2. Sommes orthogonales	469
10.3.3. Groupes orthogonaux	472
10.3.4. Groupe unitaire : les définitions	475
Chapitre 11. Topologie des réels et des corps locaux	477
11.1. Coupures de DEDEKIND	478
11.1.1. Ordre et intervalles	479
11.1.2. Connexes de \mathbf{R} , valeurs intermédiaires et racines des polynômes	484

11.2. Compacts réels	489
11.3. Valeurs absolues	492
11.3.1. Séries entières	496
11.4. \mathbf{R} est complet	500
11.4.1. Exponentielles et logarithmes réels	500
11.4.2. Développement en base b des réels	503
11.4.3. Développement des réels en fractions continues	508
11.4.4. Réels quadratiques	515
11.4.5. Topologie de certains espaces réels	521
11.5. \mathbf{Q}_p et les corps ultramétriques	524
11.5.1. Limites projectives : compacité et complétude	525
11.5.2. Lemme de HENSEL	529
11.6. Quelques transcendants de \mathbf{R}	533
11.6.1. Nombres de LIOUVILLE	533
11.6.2. Irrationalité de π	534
11.6.3. Transcendance de e	535
11.7. Formule sommatoire de EULER-MACLAURIN	538
Chapitre 12. Nombres complexes	541
12.1. Le corps des complexes	541
12.2. Plans euclidiens orientés	545
12.3. Cercles et π	550
12.3.1. Cercle unité	550
12.3.2. Exponentielle complexe	553
12.3.3. Le nombre π	555
12.4. \mathbf{C} est un corps algébriquement clos	559
12.4.1. Polynômes réels	560
12.5. Homographies et inversions planes	563
12.5.1. Homographies et inversions planes	563
12.5.2. Droites et cercles	564
12.6. Demi-plan de POINCARÉ	567
12.6.1. Le groupe modulaire	572
12.6.2. Arbre et cercles de FORD	577

12.6.3. Du demi-plan au disque	579
12.7. La sphère de RIEMANN	581
12.8. La fibration de HOPF	582
Chapitre 13. Les groupes, à nouveau	585
13.1. Groupes diédraux et extensions de groupes	585
13.1.1. Groupes diédraux	585
13.1.2. Produits semi-directs	587
13.2. Groupes finis	591
13.2.1. Les p -groupes	591
13.2.2. Groupes simples et dévissages	595
13.3. Dualité dans les groupes commutatifs finis	597
13.4. Quelques groupes duaux	599
13.4.1. Cas de \mathbf{Z} , \mathbf{R} et \mathbf{U}	600
13.5. Transformation et inversion de FOURIER	602
13.5.1. Réciprocité quadratique	607
13.5.2. Quelques mots sur les cas de \mathbf{R} , \mathbf{U} et \mathbf{Z}	612
13.6. Transformée de FOURIER rapide	613
13.6.1. Évaluation, interpolation et FOURIER	615
Chapitre 14. Les quaternions	619
14.1. Le corps des quaternions	619
14.2. Les quaternions comme matrices	620
14.3. Géométrie euclidienne en dimension 4	623
14.4. Géométrie euclidienne en dimension 3	625
14.4.1. Produit vectoriel et angles des rotations	627
14.5. Projections stéréographiques : le retour	632
14.6. Des quaternions aux octaves de CAYLEY	635
14.6.1. HOPF et quaternions	638
14.7. Extensions quaternioniennes	639
14.8. Les entiers sont sommes des quatre carrés	641

Chapitre 15. Les entiers, l'addition et la multiplication	647
15.1. Fondements	647
15.1.1. Qu'est ce qu'un nombre?	647
15.1.2. Paradoxe de l'ensemble des ensembles	649
15.1.3. Axiomatisation de l'ensemble des entiers	653
15.1.4. Construction explicite de l'ensemble des entiers	659
15.1.5. Ordonner les entiers	662
15.2. Addition, multiplication et puissance	664
15.2.1. Addition et soustraction	664
15.2.2. Multiplication et divisibilité des entiers	667
15.2.3. Puissances et nombres d'ACKERMANN	669
15.3. Cardinal	671
15.3.1. Compter dans les ensembles finis	674
15.4. Axiome du choix et lemme de ZORN	677
Chapitre 16. Annexe : espaces métriques	681
16.1. Compact	684
16.2. Connexe	685
16.3. Complet	686
Bibliographie	689
Index	693
Table des matières	703