

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|----------|
| Chapitre 1 – Analyse vectorielle | 1 |
| 1.1. Les opérateurs différentiels | 1 |
| 1.1.1. Champ scalaire et champ vectoriel | 1 |
| 1.1.2. Opérateur gradient | 2 |
| 1.1.3. Surface et gradient | 3 |
| 1.1.4. Opérateur divergence | 4 |
| 1.1.5. Opérateur rotationnel | 6 |
| 1.1.6. Opérateur laplacien | 7 |
| 1.1.7. Relations entre les opérateurs différentiels | 8 |
| 1.2. Les potentiels | 8 |
| 1.2.1. Potentiel scalaire | 8 |
| 1.2.2. Potentiel vecteur | 9 |
| 1.3. Les intégrales curvilignes, de surface et de volume | 9 |
| 1.3.1. Intégrale curviligne. Circulation d'un champ vectoriel | 9 |
| 1.3.2. Intégrale de surface. Flux d'un champ vectoriel | 11 |
| 1.3.3. Intégrale de volume | 13 |
| 1.4. Le théorème de STOKES | 13 |
| 1.5. Le théorème d'OSTROGRADSKY | 16 |
| 1.6. Exercices | 20 |

| | |
|--|---------------|
| Chapitre 2 – Les équations différentielles | 23 |
| 2.1. Position du problème. Définitions | 23 |
| 2.2. Existence et unicité des solutions | 24 |
| 2.2.1. Equation du 1 ^{er} ordre | 24 |
| 2.2.2. Equation du 2 ^e ordre | 25 |
| 2.3. Généralités sur les équations du 1 ^{er} ordre | 26 |
| 2.4. Les équations à variables séparées et séparables | 26 |
| 2.5. Les équations homogènes du 1 ^{er} ordre | 27 |
| 2.6. Les équations se ramenant aux équations homogènes | 28 |
| 2.7. Les équations linéaires du 1 ^{er} ordre | 29 |
| 2.8. L'équation de BERNOULLI | 31 |
| 2.9. Les équations aux différentielles totales | 31 |
| 2.10. Facteur intégrant | 33 |
| 2.11. Solution singulière d'une équation du 1 ^{er} ordre | 34 |
| 2.12. Généralités sur les équations d'ordre supérieur à 1 | 36 |
| 2.13. Les équations de la forme $y^{(n)} = f(x)$ | 36 |
| 2.14. Exemples d'équations du 2 ^e ordre se ramenant à des équations du 1 ^{er} ordre | 37 |
| 2.15. Les équations linéaires homogènes | 38 |
| 2.15.1. Définitions | 38 |
| 2.15.2. Propriétés | 39 |
| 2.16. Les équations linéaires homogènes du 2 ^e ordre à coefficients constants | 42 |
| 2.17. Généralisation à une équation différentielle linéaire homogène d'ordre N à coefficients constants | 43 |
| 2.18. Les équations linéaires non homogènes du 2 ^e ordre | 44 |
| 2.19. Les équations linéaires non homogènes du 2 ^e ordre à coefficients constants | 46 |
| 2.20. Application à un circuit électrique | 48 |
| 2.21. Les systèmes d'équations linéaires à coefficients constants | 50 |
| 2.22. L'intégration approchée des équations différentielles | 54 |
| 2.22.1. L'intégration approchée d'une équation du 1 ^{er} ordre | 54 |
| 2.22.2. Méthode de la série de TAYLOR | 55 |
| 2.22.3. Méthode de RUNGE et KUTTA | 56 |
| 2.23. Exercices | 58 |
| Chapitre 3 – Fonctions d'une variable complexe | 65 |
| 3.1. Définitions et propriétés élémentaires | 65 |
| 3.1.1. Continuité | 66 |
| 3.1.2. Fonction uniforme | 66 |

| | | |
|---|--|------------|
| 3.1.3. | Fonction analytique | 66 |
| 3.1.4. | Critère pour une fonction analytique | 68 |
| 3.1.5. | Mise d'une fonction analytique sous la forme $Z = f(z)$ | 68 |
| 3.1.6. | Quelques fonctions analytiques élémentaires | 69 |
| 3.2. | Points singuliers des fonctions analytiques. Fonctions holomorphes | 70 |
| 3.3. | Fonctions multiformes | 70 |
| 3.3.1. | Exemples | 70 |
| 3.3.2. | Uniformisation des fonctions multiformes à l'aide de coupures | 72 |
| 3.4. | Intégrales des fonctions analytiques | 74 |
| 3.4.1. | Intégrale curviligne d'une fonction complexe | 74 |
| 3.4.2. | Théorème de CAUCHY | 76 |
| 3.4.3. | Extension du théorème de CAUCHY | 77 |
| 3.5. | Séries entières dans le domaine complexe | 78 |
| 3.6. | Formule de CAUCHY | 80 |
| 3.7. | Développement d'une fonction holomorphe en série de TAYLOR | 81 |
| 3.8. | Les zéros des fonctions analytiques | 83 |
| 3.9. | Prolongement analytique d'un développement en série de TAYLOR | 84 |
| 3.10. | Différents types de points singuliers | 85 |
| 3.11. | Développement en série de LAURENT | 85 |
| 3.12. | Intégration par la méthode des résidus | 88 |
| 3.12.1. | Théorème des résidus | 88 |
| 3.12.2. | Calcul des résidus relatifs aux pôles | 89 |
| 3.12.3. | Applications au calcul d'intégrales définies réelles | 91 |
| 3.12.4. | Intégration des fonctions multiformes | 96 |
| 3.13. | Transformation conforme | 98 |
| 3.13.1. | Définition | 98 |
| 3.13.2. | Systèmes orthogonaux du plan | 101 |
| 3.13.3. | Applications physiques | 102 |
| 3.14. | Exercices | 103 |
| Chapitre 4 – Fonctions spéciales | | 107 |
| 4.1. | La fonction bêta | 107 |
| 4.2. | La fonction gamma et la fonction factorielle | 108 |
| 4.3. | Relation entre les fonctions bêta et gamma | 109 |
| 4.4. | La formule des compléments | 111 |
| 4.5. | Propriétés de la fonction factorielle | 112 |
| 4.5.1. | Fonctions gamma et factorielle pour les valeurs négatives de l'argument | 112 |
| 4.5.2. | Représentation graphique de la fonction factorielle | 113 |

| | | |
|---|---|------------|
| 4.5.3. | La fonction factorielle pour les nombres demi-entiers | 114 |
| 4.5.4. | La formule de STIRLING | 114 |
| 4.6. | La fonction d'erreur | 116 |
| 4.6.1. | Définition et propriétés élémentaires | 116 |
| 4.6.2. | Développement asymptotique de la fonction d'erreur | 117 |
| 4.7. | Exercices | 119 |
| Chapitre 5 – La transformation de LAPLACE | | 123 |
| 5.1. | Définition. Original et image | 123 |
| 5.2. | Image d'un monôme | 124 |
| 5.3. | Images des fonctions exponentielle et trigonométriques | 125 |
| 5.4. | Les correspondances opératoires | 126 |
| 5.4.1. | Le théorème du déplacement | 126 |
| 5.4.2. | La multiplication de la variable par une constante | 126 |
| 5.4.3. | La dérivation | 127 |
| 5.5. | Le produit de convolution | 128 |
| 5.6. | Exemples de transformées de LAPLACE | 129 |
| 5.7. | La fonction de DIRAC et son image | 132 |
| 5.8. | Applications à la résolution d'équations différentielles | 133 |
| 5.9. | Oscillateur harmonique amorti soumis à une force imposée | 134 |
| 5.10. | Exercices | 136 |
| Chapitre 6 – Analyse de FOURIER | | 141 |
| 6.1. | Séries de FOURIER | 141 |
| 6.2. | Exemples de développement en série de FOURIER | 143 |
| 6.3. | Séries de FOURIER des fonctions de période spatiale L ou temporelle T ... | 144 |
| 6.4. | Série de FOURIER d'une fonction non périodique | 146 |
| 6.5. | Forme complexe du développement | 147 |
| 6.6. | Intégrale de FOURIER | 149 |
| 6.7. | Les correspondances opératoires | 152 |
| 6.8. | Exemples de transformées de FOURIER | 154 |
| 6.9. | Transformée de FOURIER des fonctions de plusieurs variables | 156 |
| 6.10. | Exercices | 159 |
| Chapitre 7 – Les équations aux dérivées partielles | | 163 |
| 7.1. | Introduction | 163 |
| 7.2. | Les équations linéaires homogènes à coefficients constants | 163 |
| 7.3. | Equation de propagation des ondes | 164 |
| 7.3.1. | Milieu infini à une dimension | 165 |

| | | |
|--|--|------------|
| 7.3.2. | Milieu fini à une dimension. Equation des cordes vibrantes | 166 |
| 7.3.3. | Equation de propagation à trois dimensions | 169 |
| 7.4. | L'équation de diffusion | 172 |
| 7.4.1. | Diffusion à une dimension | 173 |
| 7.4.2. | Diffusion à trois dimensions | 175 |
| 7.5. | L'équation de LAPLACE | 176 |
| 7.5.1. | Coordonnées sphériques | 176 |
| 7.5.2. | Coordonnées cylindriques | 177 |
| 7.6. | L'équation de POISSON | 178 |
| 7.7. | La fonction de GREEN | 179 |
| 7.8. | Exercices | 180 |
| Chapitre 8 – Algèbre linéaire, calcul matriciel | | 183 |
| 8.1. | Les opérateurs | 183 |
| 8.2. | Espaces vectoriels et opérateurs linéaires | 185 |
| 8.2.1. | Les espaces vectoriels | 185 |
| 8.2.2. | Opérateur linéaire sur un espace vectoriel | 185 |
| 8.3. | Définition des matrices | 186 |
| 8.4. | Combinaisons de matrices | 187 |
| 8.4.1. | Addition et multiplication par un scalaire | 187 |
| 8.4.2. | Multiplication de deux matrices | 188 |
| 8.4.3. | Sous-matrices | 189 |
| 8.4.4. | Trace d'une matrice | 189 |
| 8.4.5. | Produit direct de matrices | 190 |
| 8.5. | Matrices particulières | 190 |
| 8.5.1. | Matrice nulle, unité, diagonale | 190 |
| 8.5.2. | Matrice transposée, adjointe, hermitique, unitaire | 191 |
| 8.6. | Calcul des déterminants | 192 |
| 8.7. | Inverse d'une matrice carrée | 194 |
| 8.8. | Application à la résolution des systèmes d'équations linéaires | 196 |
| 8.9. | Matrices équivalentes | 198 |
| 8.10. | Valeurs propres, vecteurs propres, équation caractéristique d'une matrice | 199 |
| 8.10.1. | Recherche des valeurs propres | 199 |
| 8.10.2. | Recherche des vecteurs propres | 200 |
| 8.11. | Théorème de CAYLEY-HAMILTON | 203 |
| 8.12. | Application aux quadripôles électriques | 206 |
| 8.13. | Espace vectoriel réel R^n | 209 |
| 8.13.1. | Définition, produit scalaire et bases | 209 |

| | | |
|----------------------------------|--|------------|
| 8.13.2. | Processus d'orthogonalisation de SCHMIDT | 210 |
| 8.13.3. | Représentation d'un opérateur linéaire | 211 |
| 8.13.4. | Changement de base | 212 |
| 8.13.5. | Application aux rotations planes | 213 |
| 8.13.6. | Application aux rotations dans l'espace : angles d'EULER | 214 |
| 8.14. | Espace vectoriel complexe C^n | 216 |
| 8.14.1. | Généralités, produit scalaire hermitique | 216 |
| 8.14.2. | Matrices hermitiques | 217 |
| 8.14.3. | Matrices unitaires | 220 |
| 8.15. | Formes quadratiques et applications | 221 |
| 8.15.1. | Diagonalisation d'une forme quadratique réelle | 221 |
| 8.15.2. | Application à l'étude des petits mouvements | 222 |
| 8.16. | Espace vectoriel et algèbre de DIRAC | 225 |
| 8.16.1. | Vecteurs droits et gauches | 225 |
| 8.16.2. | Opérateurs Linéaires | 228 |
| 8.16.3. | Commutateur de deux opérateurs | 229 |
| 8.16.4. | Valeurs et vecteurs propres | 230 |
| 8.16.5. | Produit ket-bra. Projecteurs. | 231 |
| 8.16.6. | Changement de base | 232 |
| 8.16.7. | Fonction d'opérateur hermitique | 232 |
| 8.16.8. | Produit direct ou tensoriel | 233 |
| 8.16.9. | Espaces à une infinité continue de dimensions | 235 |
| 8.17. | Exercices | 236 |
| Chapitre 9 – Les tenseurs | | 243 |
| 9.1. | Introduction | 243 |
| 9.2. | Tenseurs en coordonnées cartésiennes | 244 |
| 9.2.1. | Définition des tenseurs | 244 |
| 9.2.2. | Critère de tensorialité | 246 |
| 9.3. | Cas particuliers | 246 |
| 9.3.1. | Scalaire | 246 |
| 9.3.2. | Vecteur polaire | 247 |
| 9.3.3. | Tenseur de rang 2 | 247 |
| 9.3.4. | Tenseur symétrique de rang 2 | 247 |
| 9.3.5. | Exemples de tenseurs symétriques | 248 |
| 9.3.6. | Tenseur antisymétrique de rang 2 | 250 |
| 9.3.7. | Tenseur de rang 3 | 251 |
| 9.4. | Principe de symétrie. Application aux propriétés physiques représentées par des tenseurs | 253 |

| | | |
|--|---|------------|
| 9.5. | Les tenseurs en coordonnées non cartésiennes | 255 |
| 9.5.1. | Covariance et contravariance | 255 |
| 9.5.2. | Contraction des indices d'un tenseur | 257 |
| 9.5.3. | Tenseur métrique | 258 |
| 9.5.4. | Tenseurs antisymétriques | 260 |
| 9.6. | Application à la relativité et aux équations de MAXWELL | 261 |
| 9.6.1. | Les tenseurs en relativité | 261 |
| 9.6.2. | Les équations de MAXWELL sous forme tensorielle | 263 |
| 9.7. | Exercices | 265 |
| Chapitre 10 – Les polynômes orthogonaux | | 269 |
| 10.1. | Définitions | 269 |
| 10.2. | Formules de récurrence | 270 |
| 10.3. | Fonction génératrice | 271 |
| 10.4. | Les polynômes de LEGENDRE | 271 |
| 10.4.1. | Définition | 271 |
| 10.4.2. | Orthogonalité | 273 |
| 10.4.3. | Relations de récurrence. Equation de LEGENDRE | 274 |
| 10.4.4. | Développement d'une fonction en série de $P_l(x)$ | 276 |
| 10.5. | Fonctions de LEGENDRE associées | 277 |
| 10.5.1. | Définition | 277 |
| 10.5.2. | Relations d'orthogonalité | 278 |
| 10.5.3. | Equation différentielle | 279 |
| 10.5.4. | Relations de récurrence | 279 |
| 10.6. | Les harmoniques sphériques | 280 |
| 10.6.1. | Résolution de l'équation de LAPLACE en coordonnées sphériques .. | 281 |
| 10.6.2. | Propriétés des harmoniques sphériques | 284 |
| 10.6.3. | Développement d'une fonction en série des Y_l^m | 284 |
| 10.6.4. | Théorème d'addition des Y_l^m | 285 |
| 10.7. | Les polynômes d'HERMITE | 286 |
| 10.7.1. | Définition | 286 |
| 10.7.2. | Propriétés élémentaires des $H_n(x)$ | 287 |
| 10.7.3. | Relations de récurrence | 288 |
| 10.7.4. | Application à la résolution de l'équation de SCHRÖDINGER d'un oscillateur harmonique | 289 |
| 10.8. | Les polynômes de LAGUERRE | 290 |
| 10.8.1. | Définition. Propriétés élémentaires | 290 |
| 10.8.2. | Relations de récurrence. Equation différentielle | 291 |
| 10.9. | Exercices | 293 |

| | |
|--|------------|
| Chapitre 11 – Fonctions de BESSEL et applications | 297 |
| 11.1. L'équation différentielle de BESSEL | 297 |
| 11.2. Fonctions de BESSEL de première et de deuxième espèce | 298 |
| 11.2.1. Fonctions de BESSEL de première espèce | 298 |
| 11.2.2. Relation entre J_ν et $J_{-\nu}$ | 300 |
| 11.2.3. Fonctions de BESSEL de deuxième espèce | 301 |
| 11.3. Forme intégrale des fonctions de BESSEL | 302 |
| 11.4. Relations de récurrence | 303 |
| 11.5. Fonctions de BESSEL d'indice entier et demi-entier | 304 |
| 11.5.1. Fonctions de BESSEL d'indice entier | 304 |
| 11.5.2. Fonctions de BESSEL d'indice demi-entier | 306 |
| 11.6. Fonctions de HANKEL | 307 |
| 11.7. Les fonctions de BESSEL modifiées | 307 |
| 11.7.1. Fonctions $I_\nu(x)$ et $K_\nu(x)$ | 307 |
| 11.7.2. Relations de récurrence des fonctions de BESSEL modifiées | 309 |
| 11.7.3. Forme intégrale de $K_\nu(x)$ | 311 |
| 11.8. Comportement des fonctions de BESSEL dans les cas limite | 313 |
| 11.8.1. Faibles valeurs de l'argument | 313 |
| 11.8.2. Comportement asymptotique des fonctions de BESSEL | 314 |
| 11.9. Les fonctions de BESSEL sphériques | 315 |
| 11.10. Applications des fonctions de BESSEL | 318 |
| 11.10.1. Résolution de l'équation $\Delta\Psi + k^2\Psi = 0$ dans le plan | 318 |
| 11.10.2. Résolution de l'équation $\Delta\Psi + k^2\Psi = 0$ dans l'espace | 320 |
| 11.10.3. Ondes stationnaires dans le plan | 321 |
| 11.10.4. Ondes stationnaires en symétrie sphérique | 322 |
| 11.11. Exercices | 323 |
| | |
| Chapitre 12 – Les relations de KRAMERS–KRONIG | 327 |
| 12.1. Valeur principale d'une intégrale | 327 |
| 12.2. Valeur principale d'une fonction et fonction de DIRAC | 328 |
| 12.3. Les relations de KRAMERS–KRONIG | 329 |
| 12.4. Etude des systèmes à réponse linéaire | 332 |
| 12.4.1. Définition | 332 |
| 12.4.2. Exemples | 332 |
| 12.4.3. Propriétés des systèmes linéaires | 332 |
| 12.4.4. Excitation sinusoïdale | 333 |
| 12.5. Application aux susceptibilités | 334 |
| 12.6. Exercices | 335 |

| | |
|---|------------|
| Corrigés des exercices | 337 |
| Exercices du chapitre 1 | 337 |
| Exercices du chapitre 2 | 340 |
| Exercices du chapitre 3 | 348 |
| Exercices du chapitre 4 | 357 |
| Exercices du chapitre 5 | 361 |
| Exercices du chapitre 6 | 367 |
| Exercices du chapitre 7 | 374 |
| Exercices du chapitre 8 | 381 |
| Exercices du chapitre 9 | 393 |
| Exercices du chapitre 10 | 402 |
| Exercices du chapitre 11 | 407 |
| Exercices du chapitre 12 | 417 |
| | |
| Annexes | 421 |
| I. Unicité des solutions d'une équation différentielle du 1 ^{er} ordre | 421 |
| II. Formule de SIMPSON d'intégration | 424 |
| III. Les déterminants | 425 |
| IV. Tableau de transformées de LAPLACE | 430 |
| | |
| Bibliographie | 435 |
| | |
| Index | 437 |