

TABLE DES MATIÈRES

Préface	5
Tableaux synoptiques des problèmes	9
Chapitre 1 – FORMULATION LAGRANGIENNE	17
RÉSUMÉS DE COURS	17
1.1. Les coordonnées généralisées	17
1.2. Les équations de Lagrange	17
1.3. Les forces généralisées	19
1.4. Les multiplicateurs de Lagrange	20
PROBLÈMES · ÉNONCÉS	22
1.1. Le cric	22
1.2. La fronde	23
1.3. La corde glissant sur la table	23
1.4. Force de réaction d'une perle sur un cerceau	24
1.5. Le pendule de Huygens	24
1.6. Cylindre roulant sur un plateau mobile	25
1.7. Mouvement d'un cylindre mal équilibré	25
1.8. Essieu libre sur un plan incliné	26
1.9. L'indicateur de virage	27
1.10. Une expérience pour mesurer la vitesse de rotation de la Terre	29
1.11. Forces d'inertie généralisées	30
PROBLÈMES · SOLUTIONS	31
1.1. Le cric	31
1.2. La fronde	32
1.3. La corde glissant sur la table	33
1.4. Force de réaction d'une perle sur un cerceau	34
1.5. Le pendule de Huygens	36
1.6. Cylindre roulant sur un plateau mobile	38
1.7. Mouvement d'un cylindre mal équilibré	39
1.8. Essieu libre sur un plan incliné	43
1.9. L'indicateur de virage	47
1.10. Une expérience pour mesurer la vitesse de rotation de la Terre	49
1.11. Forces d'inertie généralisées	50
Chapitre 2 – SYSTÈMES LAGRANGIENS	53
RÉSUMÉS DE COURS	53
2.1. Potentiel généralisé	53

2.2. Système lagrangien.....	53
2.3. Intégrales premières	55
2.4. Système à deux corps avec force centrale.....	57
2.5. Petites oscillations	58
PROBLÈMES · ÉNONCÉS.....	59
2.1. Disque sur un coin en mouvement.....	59
2.2. Intégrale de Painlevé	60
2.3. Application du théorème de Noether	60
2.4. Le pendule de L. Foucault.....	60
2.5. Système de trois particules.....	62
2.6. Vibration d'une molécule linéaire triatomique : le mode "mou"	64
2.7. Ondes transversales élastiques dans un solide (ondes P)	64
2.8. Lagrangien dans un référentiel tournant.....	65
2.9. Dérive d'une particule dans un champ électromagnétique constant	66
2.10. Le piège de Penning (Penning-trap).....	67
2.11. Précession des équinoxes.....	68
2.12. Vibration de flexion d'une lame.....	70
2.13. Ondes solitaires	72
2.14. Modes de vibration d'une chaîne d'atomes	73
PROBLÈMES · SOLUTIONS.....	74
2.1. Disque sur un coin en mouvement.....	74
2.2. Intégrale de Painlevé	75
2.3. Application du théorème de Noether	77
2.4. Le pendule de L. Foucault.....	77
2.5. Système de trois particules.....	80
2.6. Vibration d'une molécule linéaire triatomique : le mode "mou"	83
2.7. Ondes transversales élastiques dans un solide (ondes P)	85
2.8. Lagrangien dans un référentiel tournant.....	86
2.9. Dérive d'une particule dans un champ électromagnétique constant	87
2.10. Le piège de Penning (Penning-trap).....	90
2.11. Précession des équinoxes.....	93
2.12. Vibration de flexion d'une lame.....	97
2.13. Ondes solitaires	99
2.14. Modes de vibration d'une chaîne d'atomes	101
Chapitre 3 – LE PRINCIPE DE HAMILTON	105
RÉSUMÉS DE COURS	105
3.1. Énoncé du principe	105
3.2. La fonctionnelle action	105
3.3. L'action et la théorie des champs	106
3.4. Quelques actions à connaître	107
3.5. Le calcul des variations.....	108
PROBLÈMES · ÉNONCÉS.....	110
3.1. Force de Lorentz.....	110

3.2. Particule relativiste dans un champ de force central	110
3.3. Principe de moindre action ?	111
3.4. Action minimum ou maximum ?	112
3.5. N'existe-t-il qu'une seule solution qui rende stationnaire l'action ?	112
3.6. Principe de Maupertuis	113
3.7. Principe de Fermat	114
3.8. La stratégie du skieur	115
3.9. Mouvement libre sur un ellipsoïde	115
3.10. Aire minimum à volume fixé	116
3.11. Forme des films de savon	117
3.12. Loi de Laplace sur la tension superficielle	118
3.13. Chaîne de pendules	119
3.14. Équation d'onde pour la lame flexible	119
3.15. Précession de l'orbite de Mercure	120
PROBLÈMES · SOLUTIONS	122
3.1. Force de Lorentz	122
3.2. Particule relativiste dans un champ de force central	123
3.3. Principe de moindre action ?	125
3.4. Action minimum ou maximum ?	127
3.5. N'existe-t-il qu'une solution qui rende stationnaire l'action ?	128
3.6. Principe de Maupertuis	130
3.7. Principe de Fermat	132
3.8. La stratégie du skieur	134
3.9. Mouvement libre sur un ellipsoïde	137
3.10. Aire minimum à volume fixé	138
3.11. Forme des films de savon	140
3.12. Loi de Laplace sur la tension superficielle	144
3.13. Chaîne de pendules	145
3.14. Équation d'onde pour la lame flexible	146
3.15. Précession de l'orbite de Mercure	147
Chapitre 4 – FORMALISME HAMILTONIEN	151
RÉSUMÉS DE COURS	151
4.1. L'impulsion généralisée	151
4.2. La fonction de Hamilton	151
4.3. Les équations de Hamilton	153
4.4. Le théorème de Liouville	153
4.5. Système autonome à un degré de liberté	154
4.6. Système hamiltonien périodique à un degré de liberté	154
PROBLÈMES · ÉNONCÉS	157
4.1. Charges électriques piégées par des conducteurs	157
4.2. Symétrie de la trajectoire	157
4.3. Hamiltonien dans un référentiel tournant	158
4.4. Flots hamiltoniens identiques	158

4.5. Le vecteur de Runge-Lenz.....	158
4.6. Plus rapide et plus écologique que le Concorde	159
4.7. Hamiltonien d'une particule chargée.....	160
4.8. Le premier invariant intégral.....	162
4.9. Quid des systèmes non autonomes	162
4.10. Le pendule inversé.....	162
4.11. Le piège de Paul (Paul trap).....	164
4.12. Lumineuses équations de Hamilton.....	165
4.13. L'application du billard	166
4.14. Double puits parabolique.....	167
4.15. Stabilité des trajectoires circulaires dans un potentiel central.....	168
4.16. Perle sur le cerceau	169
4.17. Trajectoires dans un champ de force central	170
PROBLÈMES · SOLUTIONS.....	172
4.1. Charges électriques piégées par des conducteurs	172
4.2. Symétrie de la trajectoire	173
4.3. Hamiltonien dans un référentiel tournant	175
4.4. Flots hamiltoniens identiques.....	176
4.5. Le vecteur de Runge-Lenz.....	177
4.6. Plus rapide et plus écologique que le Concorde	180
4.7. Hamiltonien d'une particule chargée.....	181
4.8. Le premier invariant intégral.....	184
4.9. Quid des systèmes non autonomes	186
4.10. Le pendule inversé.....	187
4.11. Le piège de Paul (Paul trap).....	189
4.12. Lumineuses équations de Hamilton.....	192
4.13. L'application du billard.....	194
4.14. Double puits parabolique.....	196
4.15. Stabilité des trajectoires circulaires dans un potentiel central.....	199
4.16. Perle sur le cerceau	201
4.17. Trajectoires dans un champ de force central	204
Chapitre 5 – FORMALISME DE HAMILTON-JACOBI	209
RÉSUMÉS DE COURS	209
5.1. La fonction action.....	209
5.2. L'action réduite	210
5.3. Principe de Maupertuis.....	211
5.4. Le théorème de Jacobi	212
5.5. Cas de séparation des variables	213
5.6. La construction de Huygens.....	214
PROBLÈMES · ÉNONCÉS.....	215
5.1. Comment jouer avec l'action et l'action réduite	215
5.2. Action pour l'oscillateur harmonique à une dimension.....	216
5.3. Mouvement sur une surface et géodésique	217

5.4. Surface d'onde pour la chute libre	217
5.5. Fronts d'onde bizarres	218
5.6. Lentille électrostatique	218
5.7. Principe de Maupertuis avec champ électromagnétique	220
5.8. Hamiltonien séparable, action séparable	221
5.9. Effet Stark	221
5.10. Orbites des satellites de la Terre	222
5.11. Vitesse de phase et vitesse de groupe	225
PROBLÈMES · SOLUTIONS	227
5.1. Comment jouer avec l'action et action réduite	227
5.2. Action pour l'oscillateur harmonique à une dimension	232
5.3. Mouvement sur une surface et géodésique	234
5.4. Surface d'onde pour la chute libre	235
5.5. Fronts d'onde bizarres	237
5.6. Lentille électrostatique	239
5.7. Principe de Maupertuis avec champ électromagnétique	240
5.8. Hamiltonien séparable, action séparable	242
5.9. Effet Stark	244
5.10. Orbites des satellites de la Terre	246
5.11. Vitesse de phase et vitesse de groupe	250
Chapitre 6 – SYSTÈMES INTÉGRABLES	253
RÉSUMÉS DE COURS	253
6.1. Les notions de base	253
6.1.1. Quelques définitions	253
6.1.2. Les bonnes coordonnées : les variables angles-actions	255
6.2. Compléments	257
PROBLÈMES · ÉNONCÉS	261
6.1. Expression de la période pour un mouvement à une dimension	261
6.2. Particule à une dimension dans une boîte	261
6.3. Balle rebondissant sur le sol	261
6.4. La particule dans un champ magnétique constant	262
6.5. Actions pour le problème de Kepler	263
6.6. L'atome de Sommerfeld	263
6.7. Énergie en fonction des actions	265
6.8. Invariance de la circulation par déformation continue	266
6.9. Balle rebondissant sur un plateau en mouvement	267
6.10. Oscillateur harmonique à fréquence variable	267
6.11. Choix de l'impulsion	268
6.12. Invariance du crochet de Poisson dans une transformation canonique	268
6.13. Vérification de la canonicité d'une transformation de contact	269
6.14. La chute libre à une dimension	269
6.15. Toujours la chute libre à une dimension	270
6.16. Dilatation d'échelle en fonction du temps	270

6.17. De l'oscillateur harmonique au problème coulombien	271
6.18. Générateurs des transformations fondamentales	272
PROBLÈMES · SOLUTIONS.....	274
6.1. Période pour un mouvement à une dimension.....	274
6.2. Particule à une dimension dans une boîte	274
6.3. Balle rebondissant sur le sol.....	276
6.4. Particule dans un champ magnétique constant	277
6.5. Actions pour le problème de Kepler	281
6.6. L'atome de Sommerfeld	282
6.7. Énergie en fonction des actions.....	285
6.8. Invariance de la circulation par déformation continue.....	288
6.9. Balle rebondissant sur un plateau en mouvement.....	290
6.10. Oscillateur harmonique à fréquence variable.....	290
6.11. Choix de l'impulsion	291
6.12. Invariance du crochet de Poisson dans une transformation canonique.....	292
6.13. Vérification de la canonicité d'une transformation de contact.....	293
6.14. La chute libre à une dimension	294
6.15. Toujours la chute libre à une dimension	295
6.16. Dilatation d'échelle en fonction du temps.....	296
6.17. De l'oscillateur harmonique au problème coulombien.....	297
6.18. Générateurs de transformations infinitésimales	300
Chapitre 7 – SYSTÈMES QUASI-INTÉGRABLES	305
RÉSUMÉS DE COURS	305
7.1. Introduction	305
7.2. La théorie des perturbations.....	305
7.3. La théorie canonique des perturbations	306
7.4. Les invariants adiabatiques.....	309
PROBLÈMES · ÉNONCÉS.....	311
7.1. Limites du développement perturbatif.....	311
7.2. Développement perturbatif non canonique versus canonique.....	311
7.3. Première correction canonique au pendule	312
7.4. Et au-delà du premier ordre ?.....	313
7.5. Invariant adiabatique dans un ascenseur.....	313
7.6. Invariant adiabatique et détente adiabatique	314
7.7. Charge dans un champ magnétique lentement variable.....	315
7.8. Un peu de lumière sur les aurores boréales.....	317
7.9. Perle sur une tige rigide : la phase de Hannay.....	318
PROBLÈMES · SOLUTIONS.....	321
7.1. Limites du développement perturbatif.....	321
7.2. Développement perturbatif non canonique versus canonique.....	323
7.3. Première correction canonique au pendule	325
7.4. Et au-delà du premier ordre ?.....	328
7.5. Invariant adiabatique dans un ascenseur.....	330

7.6. Invariant adiabatique et détente adiabatique	332
7.7. Charge dans un champ magnétique lentement variable.....	334
7.8. Un peu de lumière sur les aurores boréales.....	338
7.9. Perle sur une tige rigide : la phase de Hannay.....	340
Chapitre 8 – DE L'ORDRE AU CHAOS	343
RÉSUMÉS DE COURS	343
8.1. Introduction	343
8.2. Le modèle du rotateur percuté	344
8.3. Les sections de Poincaré	345
8.4. Le rotateur pour une perturbation nulle	346
8.5. Sections de Poincaré du rotateur percuté.....	347
8.6. Reconnaître les points fixes.....	350
8.7. Séparatrices / points homoclines / chaos.....	351
8.8. Compléments.....	352
PROBLÈMES · ÉNONCÉS.....	353
8.1. Disparition des tores résonnants.....	353
8.2. Fractions continues ou comment jouer avec les irrationnels	353
8.3. Propriétés de l'espace de phase de l'application standard	355
8.4. Bifurcation de la trajectoire périodique 1:1 de l'application standard.....	355
8.5. Chaos-ergodicité : une nuance.....	355
8.6. Les modes d'accélération : une curiosité de l'application standard.....	357
8.7. Comment réaliser un rotateur percuté.....	357
8.8. L'application de Anosov (ou chat de Arnold).....	358
8.9. L'accélérateur de Fermi.....	360
8.10. Pendule amorti et application non standard	362
8.11. Stabilité des orbites périodiques dans les billards.....	363
8.12. Les points de Lagrange : Grecs et Troyens de Jupiter.....	366
PROBLÈMES · SOLUTIONS.....	369
8.1. Disparition des tores résonnants.....	369
8.2. Fractions continues ou comment jouer avec les rationnels.....	370
8.3. Propriétés de l'espace de phase de l'application standard	372
8.4. Bifurcation de la trajectoire périodique 1:1 de l'application standard.....	372
8.5. Chaos-ergodicité : une nuance.....	376
8.6. Les modes d'accélération : une curiosité de l'application standard	377
8.7. Comment réaliser un rotateur percuté.....	378
8.8. L'application de Anosov	383
8.9. L'accélérateur de Fermi.....	388
8.10. Pendule amorti et application non standard	392
8.11. Stabilité des orbites périodiques dans les billards.....	395
8.12. Les points de Lagrange.....	398
Bibliographie.....	403
Table des matières.....	407