Théorème de l'énergie cinétique et relation de Bernoulli

1. Forme générale du théorème de l'énergie cinétique

Dans le texte « Équation de Navier-Stokes », accessible sur ce site sous le même item « Les bases » de la partie « Pour les scientifiques », il a été établi que l'équation du mouvement d'un milieu continu s'écrivait

$$\rho \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \tag{1}$$

où ρ désigne la masse volumique du fluide, u_i les composantes du vecteur vitesse, F_i les composantes de la force par unité de masse à laquelle le fluide est soumis, et σ_{ij} les composantes du tenseur de contrainte. Formons des produits scalaires en multipliant chaque terme par u_i et en appliquant la convention de l'indice muet :

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u^2}{2}\right) = \rho u_i F_i + u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \tag{2}$$

Remarquons que
$$u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i \sigma_{ij}\right) - \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

et intégrons cette relation (2) sur le domaine D, limité par la surface fermée S, en notant $\mathrm{d}m = \rho \,\mathrm{d}V$ la masse de l'élément de volume $\mathrm{d}V$ et en utilisant le théorème de la divergence. On obtient :

$$\int_D \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}m = \int_D u_i F_i \,\mathrm{d}m + \oint_S \sigma_{ij} u_i n_j \,\mathrm{d}S - \int_D \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}V. \tag{3}$$

La seconde intégrale du second membre n'est autre que la puissance des forces de surface exercées par le milieu extérieur sur le milieu intérieur : $\oint_S T_i u_i \,\mathrm{d}S$. On reconnaît donc dans les deux premiers termes de ce second membre la puissance des forces extérieures : $P_\mathrm{e} = \int_D u_i F_i \,\mathrm{d}m + \oint_S T_i u_i \,\mathrm{d}S$.

Au premier membre, eu égard à la propriété des intégrales de masse, on reconnaît la dérivée particulaire de l'énergie cinétique du domaine D : $\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_D \frac{u^2}{2}\mathrm{d}m$. L'interprétation du dernier terme du second membre est alors très simple : il représente la puissance des efforts intérieurs au domaine D : $P_i = -\int_D \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}V$. On notera que celle-ci n'est pas nécessairement nulle, alors que la somme des efforts intérieurs l'est.

Puisque l'air et l'eau sont des fluides visqueux, leur comportement est conforme à la loi de Newton (voir le texte « Équation de Navier-Stokes »), qui s'écrit

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} - 2\mu\left(\frac{1}{3}e_{mm}\delta_{ij} - e_{ij}\right). \tag{4}$$

On y distingue la contribution de la pression et celle des termes complémentaires proportionnels à la viscosité dynamique μ. La puissance des forces intérieures peut donc se mettre sous la forme :

$$P_i = \int_D p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)\mathrm{d}m + \int_D 2\mu\left(\frac{1}{3}e_{mm}\delta_{ij} - e_{ij}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}V. \quad (5)$$

Elle apparaît comme la somme de la puissance de compression $P_\mathrm{c} = \int_D p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)\mathrm{d}m$ et d'un terme complémentaire, qui s'avère systématiquement négatif et qui représente donc la dissipation due à la viscosité. En notant $D_\mu = -\int_D 2\mu\left(\frac{1}{3}e_{mm}\delta_{ij} - e_{ij}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}V$ cette dissipation d'énergie cinétique, l'expression du théorème de l'énergie cinétique peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = P_\mathrm{e} + P_\mathrm{c} - D_\mu. \quad (6)$$

Cette relation, déduite de la loi fondamentale de la dynamique et de la loi de Newton, implique donc que la dérivée particulaire de l'énergie cinétique du domaine D est égale à la somme de la puissance des forces extérieures (de volume et de surface) et de la puissance de compression, déduction faite de la dissipation d'énergie par la viscosité.

2. Cas d'un fluide non visqueux et incompressible : la relation de Bernoulli

Dans un fluide incompressible, la puissance de compression P_c est nulle. Par ailleurs, lorsque le nombre de Reynolds est beaucoup plus grand que l'unité, ce qui est le cas dans l'air et dans l'eau à l'échelle de la plupart des écoulements naturels, la dissipation D_μ est négligeable par rapport aux autres termes de (6). Au second membre de cette équation (6), le seul terme significatif est donc la puissance des forces extérieures. Aux grands nombres de Reynolds, la contrainte tangentielle étant négligeable par rapport à la pression, cette puissance se réduit à :

$$P_\mathrm{e} = \int_D u_i F_i \,\mathrm{d}m - \oint_S p n_i u_i \,\mathrm{d}S. \quad (7)$$

Choisissons d'appliquer ce théorème de l'énergie cinétique à un tronçon de tube de courant limité par les sections droites S_1 et S_2 et par la surface latérale Σ, avec les normales $\mathbf{n}_1$ et $\mathbf{n}_2$ orientées dans la direction des vitesses $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$, comme représenté sur la figure 1.

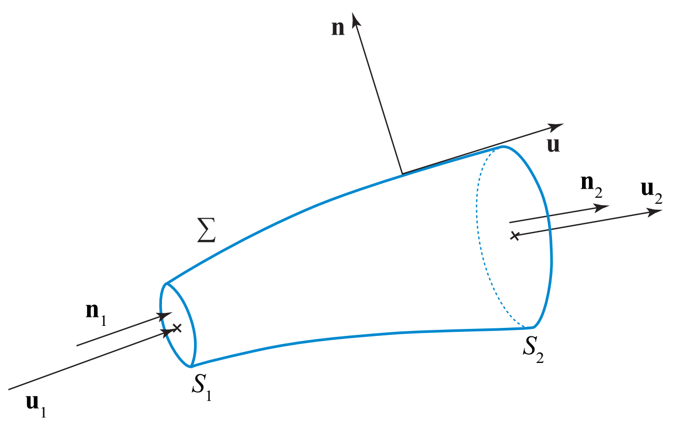

Figure 1. Le domaine de contrôle choisi est un tronçon de tube de courant limité par deux sections droites S_1 et S_2 et par la surface de courant Σ.

En utilisant une expression de la dérivée particulaire de $\mathrm{d}E_c / \mathrm{d}t$ établie dans le texte « Principe de conservation de la masse » situé dans l'item « Les bases » de la partie « Pour les scientifiques », on obtient :

$$\int_D \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho u^2}{2}\right)\mathrm{d}V - \int_D \rho \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \oint_{S_2}\left(p+\frac{\rho u^2}{2}\right)\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_2\,\mathrm{d}S - \oint_{S_1}\left(p+\frac{\rho u^2}{2}\right)\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_1\,\mathrm{d}S = 0. \qquad (8)$$

Supposons que la pesanteur soit la seule force de volume significative, de telle sorte que l'on puisse utiliser l'expression : $\mathbf{F} = -\nabla(\rho g z)$. La relation (8) devient :

$$\int_D \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho u^2}{2}\right)\mathrm{d}V + \oint_{S_2}\left(p+\rho g z+\frac{\rho u^2}{2}\right)\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_2\,\mathrm{d}S - \oint_{S_1}\left(p+\rho g z+\frac{\rho u^2}{2}\right)\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_1\,\mathrm{d}S = 0. \qquad (9)$$

Elle se simplifie fortement dès que des hypothèses complémentaires comme les suivantes sont justifiées.

- Si l'écoulement est permanent et si les sections droites S_1 et S_2 sont infinitésimales, puisque $\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{n}_1\,\mathrm{d}S_1 = \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{n}_2\,\mathrm{d}S_2 = \mathrm{d}Q$, où Q est le débit volumique, on en déduit la forme la plus classique de la relation de Bernoulli : $p+\rho g z+\dfrac{\rho \mathbf{u}^2}{2} = \mathrm{Cste}$, qui établit l'invariance de cette quantité le long de toute ligne de courant.
- Si l'écoulement est permanent et si les distributions des quantités $p+\rho g z$ et u peuvent être supposées invariantes dans la section droite, la relation $p+\rho g z+\dfrac{\rho \mathbf{u}^2}{2} = \mathrm{Cste}$ est encore vraie, même si la section du tube de courant est finie. Cette relation est donc applicable dans les écoulements en conduites.

3. Pression d'arrêt et sonde de Pitot

Considérons un obstacle cylindrique de forme très allongée et de petit diamètre d, orienté dans le sens d'un écoulement dont les lignes de courant ont une courbure négligeable comme représenté sur la figure 2.

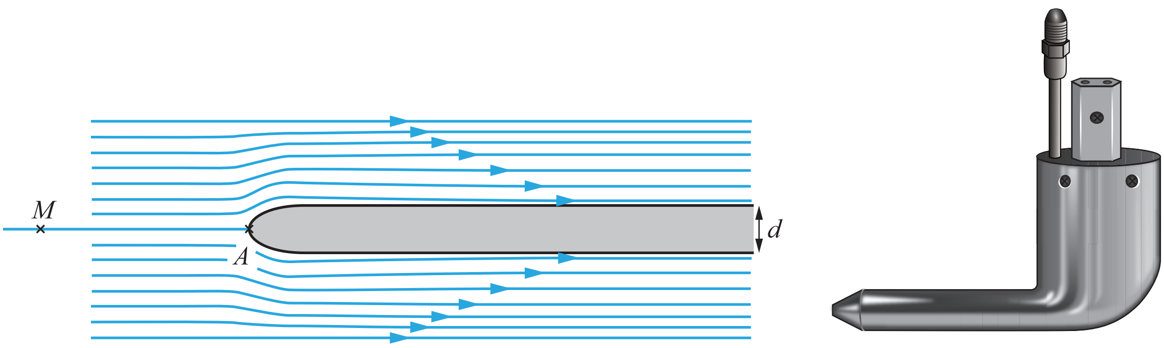

Figure 2. Illustration schématique d'une sonde de Pitot dans un écoulement parallèle à son axe et exemple d'une sonde réelle utilisée en aéronautique.

Si le diamètre d est assez petit par rapport aux dimensions caractéristiques de l'écoulement, comme la corde d'une aile d'avion à titre d'exemple, au-delà d'une dizaine de diamètres à l'amont du point d'arrêt, la perturbation engendrée par cet obstacle est négligeable. Écrivons alors la relation de Bernoulli sur la ligne de courant qui passe par le point d'arrêt A, entre un point M situé assez loin à l'amont et ce point A :

$$p_M + \rho g z_M + \frac{\rho \mathbf{u}_M^2}{2} = p_A + \rho g z_A . \tag{10}$$

En l'absence de l'obstacle, cette relation entre M et A serait différente. Les grandeurs du premier membre seraient inchangées, mais celles du second seraient modifiées puisque le point d'arrêt n'existerait pas. La relation de Bernoulli deviendrait alors :

$$p_M + \rho g z_M + \frac{\rho \mathbf{u}_M^2}{2} = p'_A + \rho g z_A + \frac{\rho \mathbf{u}_A^2}{2} . \tag{11}$$

La différence entre ces deux relations (10) et (11) conduit à la relation

$$p_A - p'_A = \frac{\rho \mathbf{u}_A^2}{2} . \tag{12}$$

Elle montre que la surpression engendrée au point d'arrêt $p_A - p'_A$ permet de mesurer la vitesse qui existerait au point A en l'absence de cet obstacle.

Dans les écoulements non confinés, où p'_A n'est autre que la pression ambiante, la sonde de Pitot est un tube simple, ouvert à son extrémité amont A et raccordé à un manomètre. Elle peut être fixée à divers endroits bien choisis sur un véhicule comme un avion, une automobile, ou un navire, dont on souhaite mesurer la vitesse. Le tube contient le fluide extérieur au repos et transmet la pression d'arrêt p_A à un manomètre qui permet d'effectuer la différence $p_A - p'_A$.

Par contre, dans les écoulements confinés dans des parois, comme les écoulements en conduites, il est nécessaire d'utiliser un dispositif complémentaire permettant de mesurer la pression statique p'_A . Soit on capte p'_A sur les parois latérales de la conduite, à une abscisse voisine de celle du point A, soit on utilise une sonde plus complexe comportant deux prises de pression : la prise de pression au point d'arrêt, ainsi qu'une prise de pression statique située dans la paroi latérale de la sonde, à quelques diamètres à l'aval du point d'arrêt qui donne une très bonne indication de cette pression p'_A comme représenté sur la figure 3.

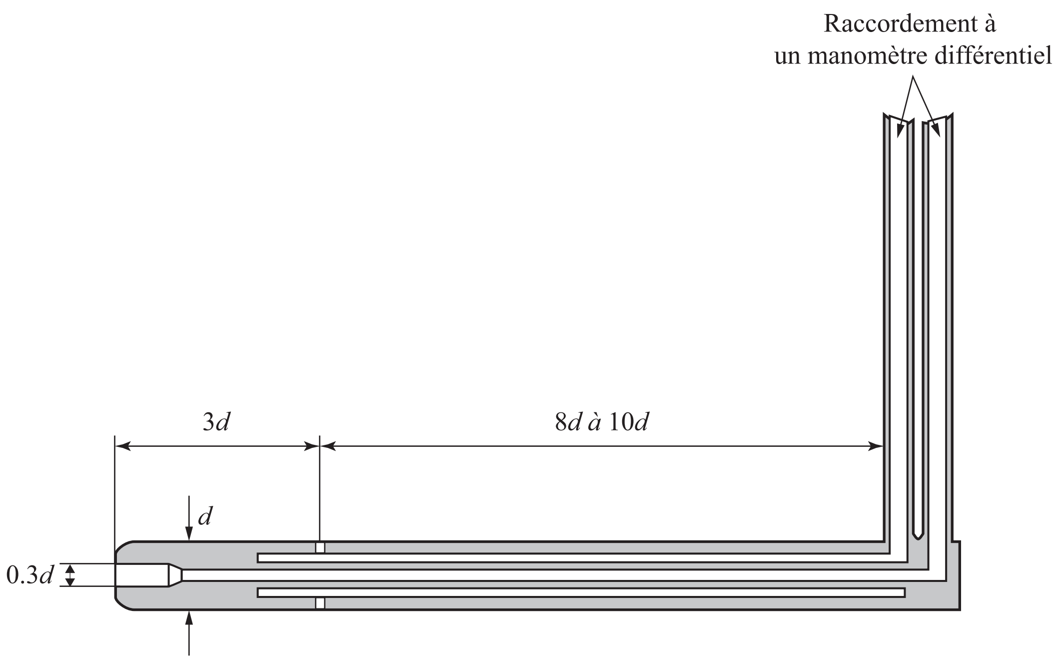

Figure 3. Schéma de principe d'une sonde de Pitot-Prandtl, combinant un tube de Pitot pour capter la pression d'arrêt p_A et des prises de pression statique situées à la distance 3d du point d'arrêt qui captent une pression très voisine de la pression statique p'_A. Un manomètre différentiel non représenté donne directement la différence $p_A - p'_A$.

Ces sondes sont souvent appelées sondes de Prandtl. Un manomètre différentiel, recevant les deux pressions de part et d'autre d'un système mobile, comme une membrane, permet de mesurer directement la différence $p_A - p'_A$ et d'en déduire la vitesse u_A.

Le crash au-dessus de l'Atlantique d'un avion qui devait relier Rio de Janeiro à Paris, survenu le 1er juin 2009, a récemment attiré une grande attention sur les risques de dysfonctionnement des sondes de Pitot. Celles-ci fournissent en effet des indications erronées dès qu'elles sont bouchées, que ce soit par des insectes à des altitudes modérées, ou en cas de gel local en haute altitude. Des dispositifs spéciaux sont donc utilisés pour effectuer un dégivrage pendant le vol et, par ailleurs, plusieurs sondes sont installées, de façon redondante, qui doivent fournir à tout instant des mesures équivalentes. Dès lors que la mesure fournie par l'une d'elles s'écarte des autres, son signal doit être abandonné et des actions sont entreprises pour restaurer son fonctionnement.

4. Introduction des pertes de charge

Sous les formes (9), (10) et (11) la relation de Bernoulli est fondée sur l'hypothèse que le frottement visqueux est négligeable, bien justifiée dans l'exemple de la sonde de Pitot. Mais cette hypothèse n'est plus du tout satisfaite dans le cas des conduites longues comme celles des installations hydrauliques, où la puissance fournie au fluide, égale au produit du débit Q par la différence de pression $p_e - p_s$ entre l'entrée et la sortie, est totalement dissipée par la viscosité, relayée par la turbulence. La question cruciale consiste à estimer cette puissance et cette différence $p_e - p_s$ qui doivent être compensées par des pompes.

Pour répondre à ce besoin, les hydrauliciens sont amenés à introduire deux notions nouvelles : d'abord celle de *charge*, définie par

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{\mathbf{u}^2}{2g} \tag{13}$$

où l'on reconnaît la somme de la hauteur piézométrique $\frac{p}{\rho g} + z$ et d'une hauteur de chute potentielle $\frac{\mathbf{u}^2}{2g}$; puis celle de *perte de charge*, notée ΔH, telle que la relation de Bernoulli entre deux positions 1 et 2 le long d'une conduite puisse être écrite :

$$H_1 = H_2 + \Delta H. \tag{14}$$

Encore faut-il disposer d'une expression de ΔH pour pouvoir appliquer la relation (14). On distingue deux formes de pertes de charge : celles, dites *régulières*, qui s'exercent tout au long des conduites, et celles dues à une production soudaine de tourbillons dont l'énergie finira par être dissipée, dites *singulières*.

Les premières représentent l'influence de la viscosité à la fois au sein de l'écoulement et sur les parois, tout au long de la conduite. Elles sont donc proportionnelles à la longueur L du tronçon de conduite et peuvent s'écrire

$$\Delta H = \lambda \frac{L}{D} \frac{\mathbf{u}^2}{2g} \tag{15}$$

où D désigne le diamètre de cette conduite et où λ, le *coefficient de perte de charge*, est une fonction du nombre de Reynolds qui dépend aussi de la rugosité de la conduite. Dans les ouvrages spécialisés en hydraulique, on trouve des expressions de ce coefficient λ, tirées d'expériences.

Les pertes de charges singulières, parce qu'elles correspondent à un mécanisme de production de turbulence assez bien défini, font souvent l'objet d'une formulation relativement précise. L'exemple le plus classique est certainement celui de la perte de charge engendrée par un élargissement brusque qui fait passer la vitesse moyenne dans la conduite d'une valeur élevée u_1 à l'amont de l'élargissement, à une valeur plus basse u_2 à l'aval. On pourra vérifier, par une simple application du théorème des quantités de mouvement (voir le texte « Loi fondamentale de la mécanique et premières applications », situé dans l'item « Les bases » de la partie « Pour les scientifiques »), que la perte de charge engendrée par cet élargissement vérifie la relation :

$$\Delta H = \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g}. \tag{16}$$

D'autres expressions peuvent être trouvées dans la littérature spécialisée, qui sont en général mises sous une forme comme $\Delta H = k\dfrac{\mathbf{u}^2}{2g}$, où le coefficient k est un nombre spécifique à chaque type de perte de charge singulière. A titre d'exemple, dans une conduite coudée à 90°, le coefficient k peut varier de 0,2 à 1 suivant le rayon de courbure du coude et la valeur du nombre de Reynolds.